Exponentialfunktionen

Aufgabe Sie haben durch einen Ferienjob 1000 € verdient. Da Sie sich zum 18. Geburtstag ein Auto kaufen wollen, soll das Geld gewinnbringend angelegt werden. Die Bank verspricht ihnen eine Verzinsung von 2% pro Jahr. Stellen Sie eine Funktion auf, welche das Kapital mit Zinseszins nach n Jahren angibt.

Antwort Wir berechnen zunächst die Zinsen nach einem Jahr.

$$K_0 = 1000\ €$$

$$z = 2\ \% = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$K_1 = 1000\ € + 1000\ € \cdot 0{,}02 = 1020\ €$$

Die Formel stellen wir etwas um, ausklammern von 1000 €.

$$K_1 = 1000\ € \cdot (1 + 0{,}02) = 1000\ € \cdot 1{,}02$$

Die Multiplikation mit 1,02 berechnet somit eine Steigerung von 2% von einem Jahr auf das nächste. Nach zwei Jahren ergibt sich damit ein Kapital von 1040,4 €.

$$K_2 = K_1 \cdot 1{,}02 = 1040{,}4\ €$$

Wir ersetzen K_1 durch den obigen Ausdruck und fassen zusammen.

$$K_2 = 1000\ € \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 1000\ € \cdot 1{,}02^2$$

Das können wir jetzt für eine beliebige Anzahl Jahre $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern.

$$K_n = 1000\ € \cdot 1{,}02^n$$

Wollen wir nun wissen wie viel Geld nach 10 Jahren auf dem Konto liegt, brauchen wir für n nur 10 einzusetzen.

$$K_{10} = 1000\ € \cdot 1{,}02^{10} = 1219\ €$$

Wir nehmen den Ausdruck zum Anlass eine allgemeine Exponentialfunktion zu definieren.

Definition (Exponentialfunktion)

Wir nennen eine Funktion $f(x), x \in \mathbb{R}$mit $a, b > 0$der Form

$$f(x) = a \cdot b^x$$

eine Exponentialfunktion. Dabei ist a der Anfangs- oder Startwert und b die Änderungsrate.

Wie sich leicht zeigen lässt, entspricht der Anfangswert dem y-Achsenabschnitt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a \cdot 1 = a$$

Aufgabe Bei der Energieerzeugung in Atomkraftwerken fällt das Radioaktive Jod-Isotop I-131 an. Dieses zerfällt pro Tag um 8,3%. Stellen Sie eine Funktion auf, welche bei einem Anfangswert von 100 MBq (Megabecquerel) die Restmenge nach t Tagen angibt.

Antwort Wir berechnen wieder zunächst die Menge nach einem Tag.

$$M_0 = 100\ MBq$$

$$z = 8{,}3\% = 8{,}3 \div 100 = 0{,}083$$

$$M_1 = 100\ MBq - 100\ MBq \cdot 0{,}083$$

Wir klammern wieder aus.

$$M_1 = 100\ MBq \cdot (1 - 0{,}083)$$

$$M_1 = 100\ MBq \cdot 0{,}917$$

Daraus können wir den folgenden Ausdruck für die Menge in Abhängigkeit der Tage bestimmen.

$$M_n = 100\ MBq \cdot 0{,}917^t$$

Ein Vergleich der beiden Beispiele legt folgende Definition nahe.

Definition (Wachstum/Zerfall)

Eine Exponentialfunktion der Form

$$f(x) = a \cdot b^x$$

beschreibt einen **Wachstumsprozess**mit prozentualer Zuwachsrate von $b - 1$für

$$b > 1$$

und einen **Zerfallsprozess**mit prozentualer Zerfallsrate von $1 - b$für

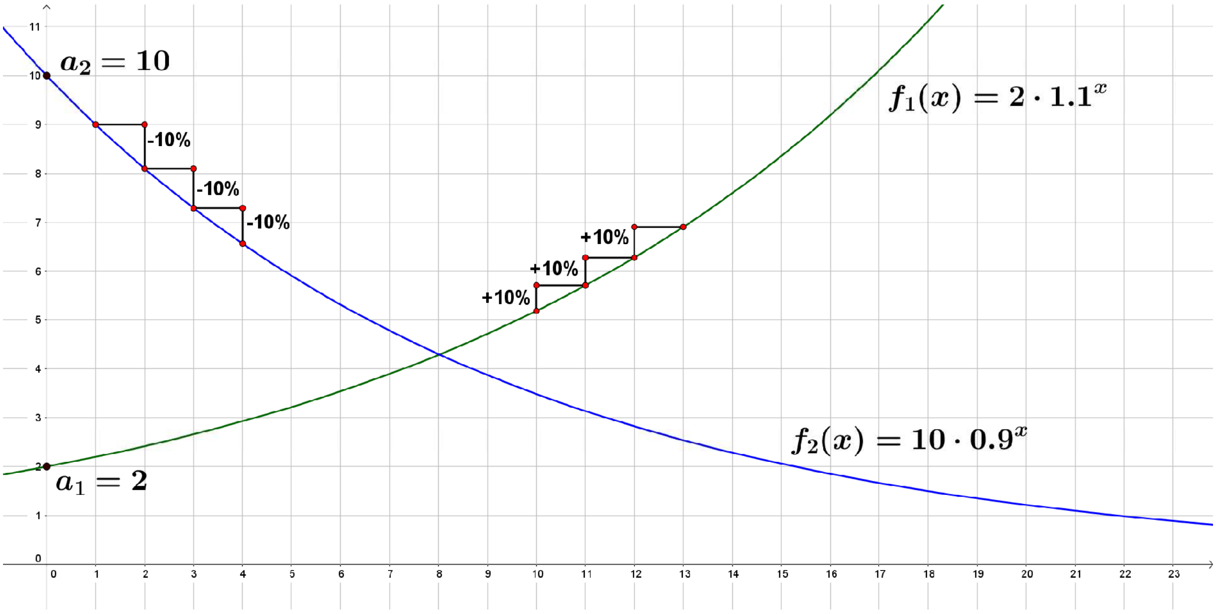
$$0 < b < 1$$

Zum Verständnis der Größen a und b werfen wir noch einen zusammenfassenden Blick auf die folgende Graphik. An den Anfangswerten a_1 und a_2 schneiden die Funktionen die y-Achse (Ordinate). Bei f_1 handelt es sich um einen Wachstumsprozess mit Änderungsrate von 1,1. Daraus ergibt sich ein Zuwachs von 10% pro Einheit auf der Abszisse.

$$1{,}1 - 1 = 0{,}1 = 10\%$$

Die Funktion f_2 beschreibt einen Zerfallsprozess mit Änderungsrate 0,9. Das ergibt einen Zerfall von 10% pro Einheit auf der x-Achse (Abszisse).

$$1 - 0{,}9 = 0{,}1 = 10\%$$



Wenden wir uns einer interessanten Frage im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen zu. Die gefundene Funktion zum radioaktiven Zerfall des Jod-Isotop I-131 gibt die Menge in Abhängigkeit der Tage an. Eine entscheidende Größe der Physik ist in Bezug auf radioaktive Stoffe die sogenannte Halbwertszeit, sie gibt an wie lange es dauert bis sich die Stoffmenge um die Hälfte reduziert hat. Da wir zu Beginn eine Menge von 100 MBq hatten, suchen wir also die Zeit t zu der noch 50 MBq vorhanden sind.

$$100\ MBq \cdot 0{,}917^t = 0{,}5 \cdot 100\ MBq$$

$$0{,}917^t = 0{,}5$$

Stellt sich die Frage: Wie kann eine Gleichung mit gesuchter Größe im Exponenten gelöst werden?

Antwort Dazu müssen wir uns zunächst einmal überlegen was die Darstellung a^n überhaupt bedeutet.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n-\text{mal}}$$

Bislang ist uns dieser Ausdruck immer mit der Unbekannten in der Basis begegnet, bspw. in der folgenden Form.

$$x^3 = 125$$

Dabei stellten wir uns die Frage: *Welche Zahl ergibt drei mal mit sich selber multipliziert 125.* Werkzeug unserer Wahl zur Lösung war die Wurzel.

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

Unser neues Problem hat aber die folgende Gestalt.

$$2^x = 8$$

Wir müssen uns also die Frage stellen: *Wie oft müssen wir 2 mit sich selber multiplizieren damit wir 8 erhalten?*

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3-\text{mal}} = 8$$

Praktischer weise gibt es auch dafür ein passendes Werkzeug auf dem Taschenrechner, den Logarithmus. Ähnlich der Wurzel muss auch dieses abhängig vom Problem gewählt werden. Da in der Gleichung x drei mal mit sich selber multipliziert wurde, haben wir die dritte Wurzel genommen. Beim Logarithmus suchen wir ja den Exponenten zu zwei, daher wählen wir hier den Logarithmus zur Basis 2.

$$\log_2(8) = 3$$

Auf Basis unserer Überlegungen definieren wir den Logarithmus wie folgt.

Definition (Logarithmus)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$, dann ist der Logarithmus von b zur Basis a diejenige Zahl c, mit der a potenziert werden muss um b zu erhalten.

$$\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Aus der Definition folgt unmittelbar.

$$\log_a(a) = 1$$

Damit lässt sich eine Lösung unserer Gleichung finden.

$$0{,}917^t = 0{,}5$$

$$t = \log_{0{,}917}(0{,}5) \approx 8$$

Nach ca. 8 Tagen halbiert sich eine Menge von Jod-Isotopen I-131. Allerdings wird reduziert sich dadurch die tatsächliche Menge an zerfallenden Atomen, weshalb sich eine Halbwertszeit von 8 Tagen zwar zunächst gut anhört, letztendlich aber einen langen Zerfallsprozess voraussetzt.

Problematisch wird die Anwendung des Logarithmus, wie er bislang verwendet wurde, für all diejenigen ohne entsprechende Taste auf dem Taschenrechner. Die meisten Taschenrechner verfügen nur über eine Taste

$$\ln x$$

oder zusätzlich

$$\log x$$

Diese sind identisch mit dem Logarithmus zur Basis 10 bzw. zur Basis $e = 2.718 \ldots$, der Eulerschen Zahl.

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log x = \log_{10} x$$

Zur Basis e werden wir im späteren Verlauf noch kommen.

Dank eines leicht nachweisbaren Logarithmengesetzes ist es aber auch möglich nur mit dem sogenannten natürlichen Logarithmus zur Basis e zu arbeiten. Aus Sicht der Hochschulmathematik ist sogar nur dieser definiert. Zwar gibt es noch weitere Gesetze, diese sind für die Arbeit in der Schule allerdings nicht von Bedeutung.

Satz (Logarithmengesetz)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$, dann gilt

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$

Beweis Wir verwenden das Folgende Potenzgesetz für den Nachweis der Gültigkeit.

$$(a^y)^z = a^{y \cdot z}$$

Zunächst wenden wir darauf den Logarithmus zur Basis $x$an.

$$\log_a((x^y)^z) = \log_a(x^{y \cdot z})$$

Nach der Definition des Logarithmus folgt.

$$\log_a(x^{y \cdot z}) = y \cdot z$$

Daraus ergibt sich insgesamt.

$$\log_a((a^y)^z) = y \cdot z$$

Wir legen folgende Bezeichnungen fest.

$$a^y = b$$

$$z = c$$

Daraus folgt, wiederum aus der Definition.

$$a^y = b \Leftrightarrow y = \log_a(b)$$

Eingesetzt in unsere Gleichung erhalten wir.

$$\log_a(b^c) = \log_a(b) \cdot c$$

Was zu beweisen war.

Schauen wir uns das Logarithmengesetz bei der Arbeit an. Versuchen wir unsere Frage nach der Halbwertszeit einmal nur mit der Anwendung des natürlichen Logarithmus zu lösen.

$$0{,}917^t = 0{,}5$$

$$\ln(0{,}917^t) = \ln(0{,}5)$$

Jetzt wenden wir unser Gesetz von oben an.

$$t \cdot \ln(0{,}917) = \ln(0{,}5)$$

$$t = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}917)}$$

Voilà, es ist also gar nicht nötig Logarithmen zu beliebigen Basen eingeben zu können, eine Basis reicht im Grunde völlig. Allerdings ist die Verwendung der entsprechenden Taste auf dem Taschenrechner sicherlich einfacher und sollte bevorzugt werden.

Wir halten unsere Beobachtungen in einem Satz fest. Ein Nachweis für die Gültigkeit kann aus der obigen Anwendung abgeleitet werden.

Satz (Basiswechsel)

Seien $a, b, c > 0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Nachdem wir nun einiges über die Darstellung und das Verhalten von Exponentialfunktionen wissen, wollen wir uns eine weitere Anwendung von Exponentialfunktionen anschauen. Dabei gehen wir insbesondere auf die Bestimmung einer Exponentialfunktion ein.

Aufgabe Ein Pendel wird waagerecht ausgelenkt und losgelassen. Nach 2 und 4 Pendelbewegungen wird die Höhe der Kugel gegenüber der Ruhelage gemessen.

- Höhe nach 2 Pendelbewegungen: 8,1 cm
- Höhe nach 4 Pendelbewegungen: 6,561 cm

Die folgenden Fragestellungen sind zu beantworten:

1. Wie lange ist das Pendel?
2. Wann ist die Pendelhöhe kleiner 1 cm?

Antwort Da sich die Höhe eines Pendels in Abhängigkeit einer Exponentialfunktion verringert, stellen wir zunächst eine Funktion für die Höhe in Abhängigkeit der Pendelbewegungen auf. Wir beginnen mit dem Einsetzen der beiden Punkte in die allgemeine Funktionsform.

$$f(x) = a \cdot b^x$$

$$f(2) = a \cdot b^2 = 8{,}1$$

$$f(4) = a \cdot b^4 = 6{,}561$$

Die beiden Gleichungen lösen wir nach $a$auf und setzen sie gleich.

$$a = 8{,}1 \cdot b^{-2}$$

$$a = 6{,}561 \cdot b^{-4}$$

$$8{,}1 \cdot b^{-2} = 6{,}561 \cdot b^{-4}$$

Hierbei ist auf das Potenzgesetz $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ zu achten. Nun können wir nach b auflösen.

$$8{,}1 \cdot b^2 = 6{,}561$$

$$b^2 = 0{,}81$$

$$b = \sqrt[2]{0{,}81} = 0{,}9$$

Wir erhalten wie erwartet eine Zerfallsrate, $b = 0{,}9$.

Bestimmen wir als nächstes den Anfangswert, dazu setzen wir b in eine der Gleichungen für a ein.

$$a = 8{,}1 \cdot 0{,}9^{-2} = 10$$

Damit lautet die gesuchte Exponentialfunktion.

$$f(x) = 10 \cdot 0{,}9^x$$

Das Pendel hat demnach eine Ausgangshöhe von 10 cm, welche damit dem Radius und daher der Pendellänge entspricht. Pro Pendelbewegung verringert sich die Höhe um 10%.

Bleibt noch die Frage nach der Häufigkeit bis der Ausschlag unter einem Zentimeter liegt.

$$f(x) = 10 \cdot 0{,}9^x = 1$$

$$0{,}9^x = 0{,}1$$

Erste Möglichkeit mit der Definition des Logarithmus.

$$x = \log_{0,9}(0{,}1) = 21{,}85$$

Oder mit dem Basiswechsel.

$$\ln(0{,}9^x) = \ln(0{,}1)$$

$$x \cdot \ln(0{,}9) = \ln(0{,}1)$$

$$x = \frac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}1)} = 21{,}85$$

Nach 22 Durchläufen ist der Ausschlag kleiner 1 cm.

Die gute Nachricht, damit haben wir im Grunde alle relevanten Arbeitsschritte in Bezug auf Exponentialfunktionen behandelt. Im weiteren Verlauf wollen wir noch einige Anwendungsbeispiele betrachten, neben einfachen Wachstums- und Zerfallsfunktionen noch die beschränkten Varianten behandeln und die Exponentialfunktion mit der sogenannten e-Funktion in Verbindung bringen.

Dazu betrachten wir zunächst den Entladevorgang eines Kondensators. Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauteil, bestehend aus zwei parallelen Metallplatten, welches elektrische Energie speichern kann. Beim Entladen bleibt die Spannung nicht konstant, sondern verringert sich mit der Funktion.

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die Größe von τ kann wie folgt bestimmt werden.

$$\tau = R \cdot C$$

Wir schauen uns zunächst die Entladekurve eines Kondensators am Widerstand R an. Dabei gehen wir von folgenden Werten aus.

$$U_0 = 12\ V$$

$$R = 10\ k\Omega$$

$$C = 1\ \mu F$$

Mit diesen stellen wir die Funktion auf.

$$\tau = 10\ k\Omega \cdot 1\ \mu F = 10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \mu F = 0{,}01s$$

$$u_C(t) = 12\ V \cdot e^{-\frac{t}{0{,}01s}}$$

t ist hier die Zeit in Sekunden. Wir wollen die Funktion im Bereich von 0 ms bis 50 ms zeichnen, also für Werte zwischen 0 und 0,05. Dabei gelten die Gleichheiten:

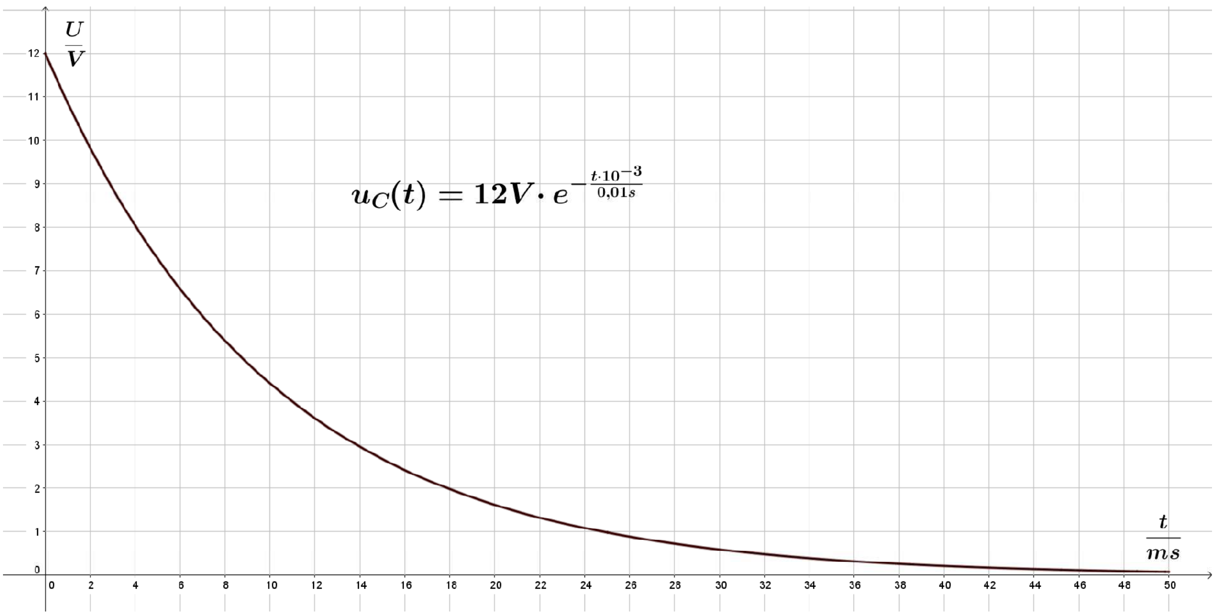
$$0\ s = 0 \cdot 10^{-3}\ s = 0\ ms$$

$$0{,}05\ s = 5 \cdot 10^{-3}\ s = 50\ ms$$

Damit wir Werte zwischen 0 und 50 eingeben können, übernehmen wir einfach den festen Faktor 10^{-3} für Millisekunden in die Funktion.

$$u_C(t) = 12\ V \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01s}}$$

Jetzt können wir in die Funktion Werte zwischen 0 und 50 und nicht 0 bis 0,05 einsetzen. Der Graph der Funktion sieht wie folgt aus.



Die Funktion ist dabei nicht von der Form $a \cdot b^x$, stellt aber dennoch einen exponentiellen Zerfall dar. Mit der Anwendung des bereits erwähnten Potenzgesetzes $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ kann die Funktion in unsere bekannte Form umgestellt werden.

Unsere Funktion hat die folgende Form.

$$a \cdot e^{c \cdot x}$$

Mit dem Potenzgesetz erhalten wir.

$$a \cdot e^{c \cdot x} = a \cdot (e^c)^x = a \cdot b^x$$

Daraus folgt direkt eine Möglichkeit zur Bestimmung der bekannten Form.

$$b = e^c$$

Daher können wir unsere Entladekurve auch wie folgt darstellen.

$$e^{-\frac{10^{-3}}{0{,}01 s}} = 0{,}905$$

$$12\,V \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01 s}} = 12\,V \cdot 0{,}905^t$$

Da $0 < e^c < 1$ für $c < 0$ und $e^c > 1$ für $c > 0$, ist die folgende Definition für *e*-Funktionen naheliegend.

Definition (*e*-Funktion)

Eine Exponentialfunktion der Form

$$f(x) = a \cdot e^{c \cdot x}$$

wird als ***e*-Funktion** bezeichnet und beschreibt einen **Wachstumsprozess** für

$$c > 0$$

und einen **Zerfallsprozess** für

$$c < 0$$

Wie wir aus einer *e*-Funktion eine Exponentialfunktion erhalten wurde bereits erklärt, bleibt die Frage zu klären wie wir aus einer Exponentialfunktion eine *e*-Funktion erhalten können. Dazu betrachten wir die folgende Gleichheit.

$$a \cdot b^x = a \cdot e^{c \cdot x}$$

$$b^x = e^{c \cdot x}$$

$$\ln(b^x) = \ln(e^{c \cdot x})$$

$$x \cdot \ln(b) = c \cdot x$$

$$c = \ln(b)$$

Wir halten den Zusammenhang in einem Satz fest.

Satz (Zusammenhang zwischen *e*-Funktion und Exponentialfunktion)

Für die beiden Funktionen

$$f_1(x) = a \cdot b^x$$

$$f_2(x) = a \cdot e^{c \cdot x}$$

bestehet der folgende Zusammenhang

$$b = e^c \Leftrightarrow c = \ln(b)$$

Wir können daher alle Betrachten und Werkzeuge der Exponentialfunktionen auf *e*-Funktionen übertragen. So wird in der Elektrotechnik gerne nach der Zeit bis zur vollständigen Entladung eines Kondensators gefragt. Da die Funktion die Abszisse jedoch nicht schneidet, wird stattdessen nach der Zeit bis zur 99% prozentigen Entladung gefragt. Wir suchen also die Zeit bis nur noch 1% der Anfangsspannung vorhanden ist.

$$12\,V \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01s}} = 0{,}01 \cdot 12\,V$$

$$e^{-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01s}} = 0{,}01$$

$$\ln\left(e^{-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01s}}\right) = \ln(0{,}01)$$

$$-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01s} = \ln(0{,}01)$$

$$t = -\ln(0{,}01) \cdot 0{,}01s \cdot 10^3 = 46$$

Nach einer Zeit von $46\ ms$ ist der Kondensator bis auf 1% entladen. In der Elektrotechnik gibt es eine Faustformel, diese besagt dass nach 5τ weniger als 99% der Anfangsspannung vorhanden sind. Mit einer Zeitkonstanten $\tau = 10\ ms$ ist die Faustformel im vorliegend Fall eine gute Orientierung.

Des weiteren interessiert den Elektrotechniker wie viel Prozent der Ausgangsspannung nach einem τ noch vorhanden sind.

$$u_C(\tau) = u_C(10\ ms) = 12\,V \cdot e^{-\frac{10\ ms \cdot 10^{-3}}{0{,}01s}} = 4{,}41\,V$$

$$\frac{4{,}41\,V}{12\,V} \cdot 100 = 36{,}79\%$$

$$100\% - 36{,}79\% = 63{,}21\%$$

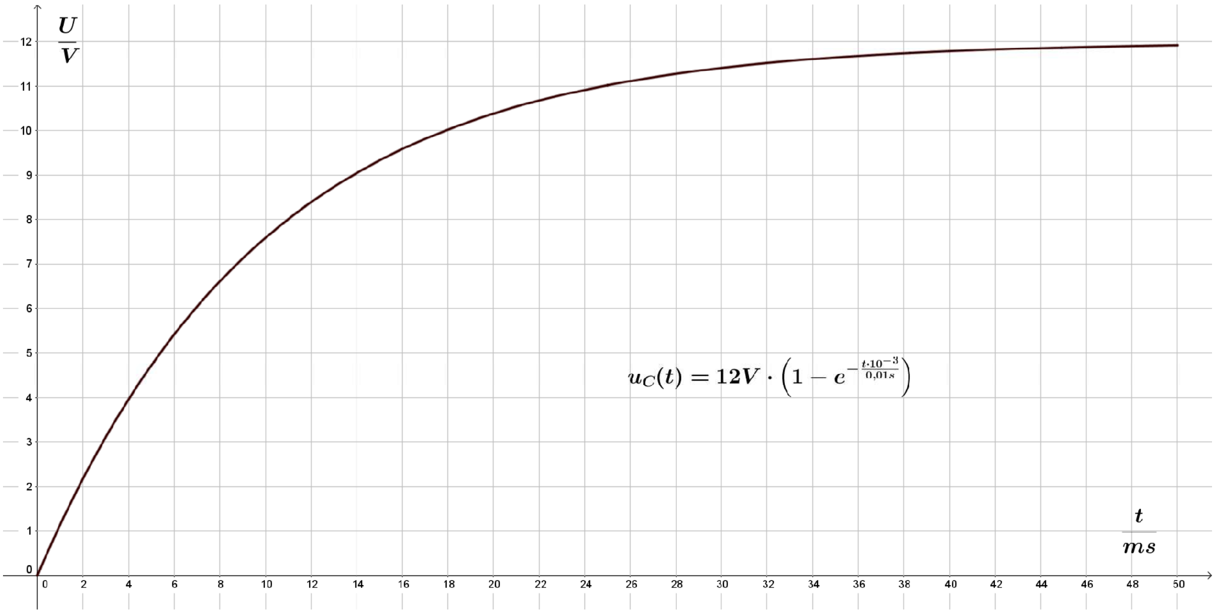
Die Spannung ist auf 36,79% des Anfangswertes gesunken oder umgekehrt, sie ist um 63,21% gesunken.

Betrachten wir zum Vergleich die Ladekurve des gleichen Kondensator über den Widerstand $R = 10\ k\Omega$.

$$u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Bezogen auf t in Millisekunden erhalten wir für unsere Anwendung folgende Funktion.

$$u_C(t) = 12\,V \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \cdot 10^{\cdot 3}}{0{,}01s}}\right)$$



Ein zum Teil vertrauter aber dennoch neuer Anblick. Die e-Funktion von vorhin ist quasi umgedreht worden. In dem Fall sprechen wir von einem beschränkten exponentiellen Wachstum, der Wert 12 wird hier nie erreicht.

Frage Aber wie kommt es, dass die Funktion umgedreht wurde?

Antwort Der Trick liegt in der Konstruktion mit der Differenz aus eins und e-Funktion in der Klammer. Dazu lösen wir die Klammer einmal auf.

$$u_C(t) = 12\,V - \underbrace{12\,V \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^{\cdot 3}}{0{,}01s}}}_{\text{Entladekurve}}$$

Rechts steht die oben untersuchte e-Funktion für den Endladevorgang. Die Werte werden von der Konstanten 12 abgezogen. Wo wir im Endladevorgang bei 12 gestartet sind, ergibt sich hier ein Startwert von $12 - 12 = 0$. Während die Werte für die e-Funktion immer kleiner werden, vgl. die Entladekurve, wird die Differenz immer größer. Für sehr große Werte von t strebt die Entladekurve gegen 0 und unsere Differenz gegen die Grenze $12 - 0 = 12$.

Aus den Überlegungen ergibt sich die Folgende Definition.

Definition (Beschränktes exponentielles Wachstum)

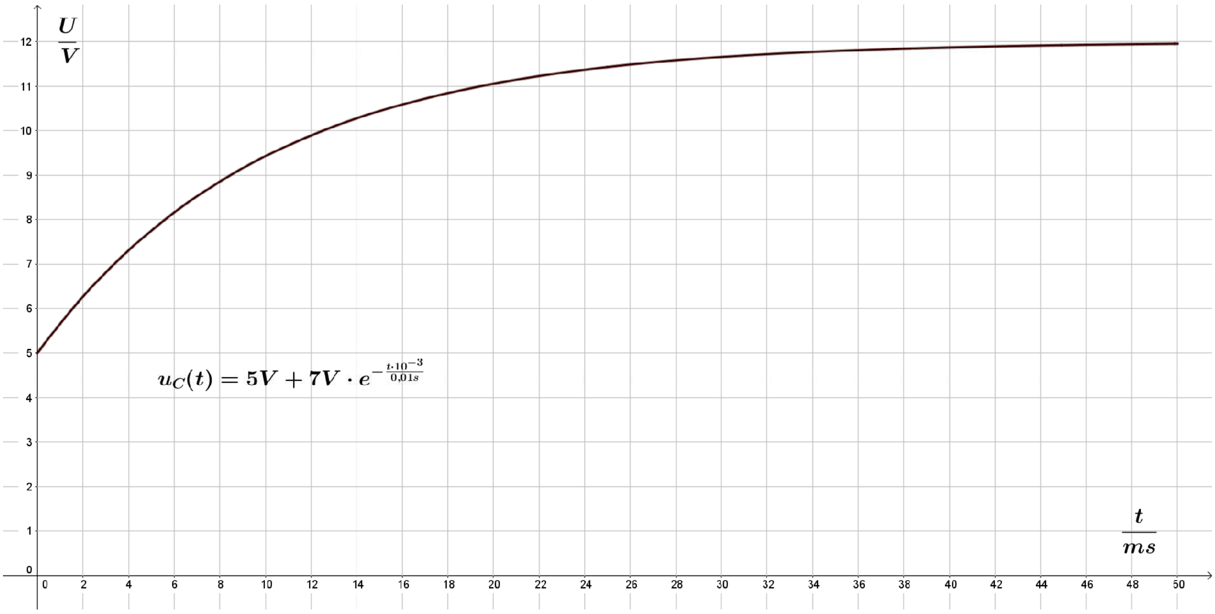
Eine Funktion der Form

$$f(x) = S - A \cdot b^x$$

mit $S, a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$ und $A > 0$ beschreibt einen beschränkten exponentiellen Wachstumsprozess. Hierbei gibt S die obere Schranke an, b beschreibt die Wachstumsrate und $S - A$ gibt den Anfangswert an.

Währe unser Kondensator zum Beispiel schon auf einen Wert von $5\,V$ geladen und soll nun weiter auf $12\,V$ geladen werden, ergebe sich die folgende Funktion.

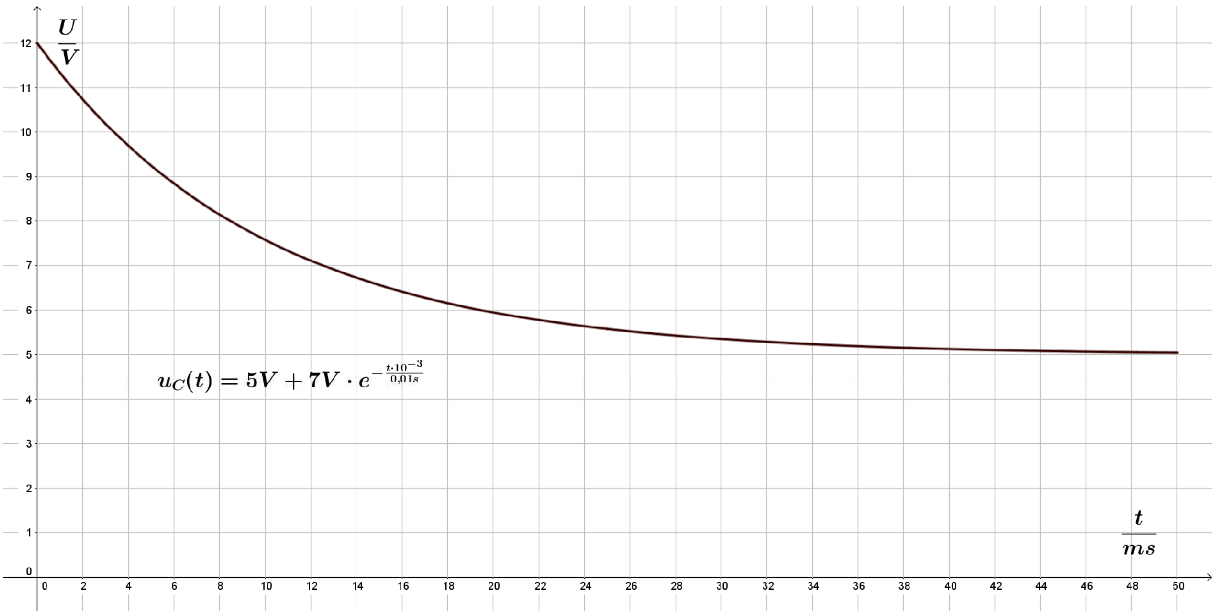
$$u_C(t) = 12\,V - 7\,V \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01s}}$$



Mit dem Anfangswert.

$$u_C(0) = 12\,V - 7\,V \cdot e^0 = 12\,V - 7\,V = 5\,V$$

Was für Wachstumsprozesse geht, klappt natürlich auch für Zerfallsprozesse. Die Idee für den Wachstumsprozess wird einfach umgedreht. Wir ziehen von der Schranke keine Werte ab, sondern addieren zur Schranke immer kleiner werdende Werte. Es genügt daher das Minus durch ein Plus zu ersetzen.



Nehmen wir an der Kondensator soll auf einen Wert von $5\,V$ entladen werden. Dann genügt es die Entladefunktion leicht zu modifizieren.

$$u_C(t) = 5\,V + 7\,V \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^{-3}}{0{,}01s}}$$

Achtung! Auch wenn man ihn hier nicht sofort erkennen kann, liegt der Anfangswert noch immer bei $12\,V$ (siehe Graph).

$$u_C(0) = 5\,V + 7\,V \cdot e^0 = 5\,V + 7\,V = 12\,V$$

Analog zum beschränken Wachstum können wir den beschränkten Zerfall definieren.

Definition (Beschränkter exponentieller Zerfall)

Eine Funktion der Form

$$f(x) = S + A \cdot b^x$$

mit $S, a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$ und $A > 0$ beschreibt einen beschränkten exponentiellen Zerfallsprozess. Hierbei gibt S die untere Schranke an, b beschreibt die Zerfallsrate und $S - A$ gibt den Anfangswert an.

Damit haben wir dann aber wirklich alle für die Schule relevanten Betrachtungen zu Exponentialfunktionen geführt. Von den vielen möglichen Anwendungen haben wir uns die Anlage von Geld, den radioaktiven Zerfall, das Pendel und den Kondensator angeschaut, weitere Anwendungen können sein: Federpendel, Bakterienwachstum, Spulen und viele mehr. Exponentialfunktionen stellen eine große Bedeutung in der Naturwissenschaft dar.

Schauen wir uns noch einige der Beispiele an, um die geführten Überlegungen weiter zu vertiefen.

Federpendel Ein Federpendel reduziert seinen Ausschlag nach dem loslassen anhand einer Exponentialfunktion. Wir lenken ein Federpendel um $15\,cm$ aus seiner Ruhelage aus und messen den Ausschlag nach einer und zwei Pendelbewegungen.

$$f(1) = 13{,}8$$

$$f(2) = 12{,}696$$

Anhand der Werte stellen wir die Exponentialfunktion auf.

$$f(x) = a \cdot b^x$$

$$f(1) = a \cdot b^1 = 13{,}8 \Leftrightarrow a = 13{,}8 \cdot b^{-1}$$

$$f(2) = a \cdot\ b^2 = 12{,}696 \Leftrightarrow a = 12{,}696 \cdot b^{-2}$$

$$13{,}8 \cdot b^{-1} = 12{,}696 \cdot b^{-2}$$

$$13{,}8 \cdot b = 12{,}696$$

$$b = 0{,}92$$

Der Ausschlag nimmt um 8% pro Schwingung ab.

$$1 - b = 1 - 0{,}92 = 0{,}08 = 8\%$$

Wir berechnen noch den Anfangswert und erhalten die gesuchte Exponentialfunktion. Alternativ können wir hier direkt 15 cm einsetzen, diese waren ja aus der Startbedingung bekannt.

$$a = 13{,}8 \cdot 0{,}92^{-1} = 15$$

$$f(x) = 15 \cdot 0{,}92^{x}$$

Nun wollen wir schauen wann der Ausschlag sich auf weniger als 2 cm verringert hat.

$$15 \cdot 0{,}92^{x} = 2$$

$$0{,}92^{x} = \frac{2}{15}$$

$$x = \log_{0{,}92}\left(\frac{2}{15}\right) = 24{,}16$$

Oder alternativ.

$$x = \frac{\ln\left(\frac{2}{15}\right)}{\ln(0{,}92)} = 24{,}16$$

Wir benötigen demnach mindestens 25 Schwingungen damit der Ausschlag unter 2 cm liegt.

Ein Vergleich mit der Herleitung der Pendelgleichung aus der Physik zeigt, dass es sich dort um eine e-Funktion handelt. Daher soll auch unsere Pendelgleichung in eine e-Funktion überführt werden.

$$c = \ln(0{,}92) = -0{,}083$$

$$f(x) = 15 \cdot 0{,}92^{x} = 15 \cdot e^{-0{,}083x}$$

Erhitzung Gerade im Sommer verlangt es einen nach einem schönen Kaltgetränk. Allerdings wärmt sich dieses in der Umgebungstemperatur auf. Der Vorgang kann mit folgender Funktion beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Minuten und T die Temperatur in °C an.

$$T(t) = 30 - 22 \cdot e^{-0{,}105t}$$

Was können wir über die Funktion sagen? Es handelt sich um einen beschränkten exponentiellen Wachstumsprozess. Die Temperatur steigt vom Anfangswert 8 °C auf eine Umgebungstemperatur von 30 °C.

$$T(0) = S - A = 30 - 22 = 8$$

$$S = 30$$

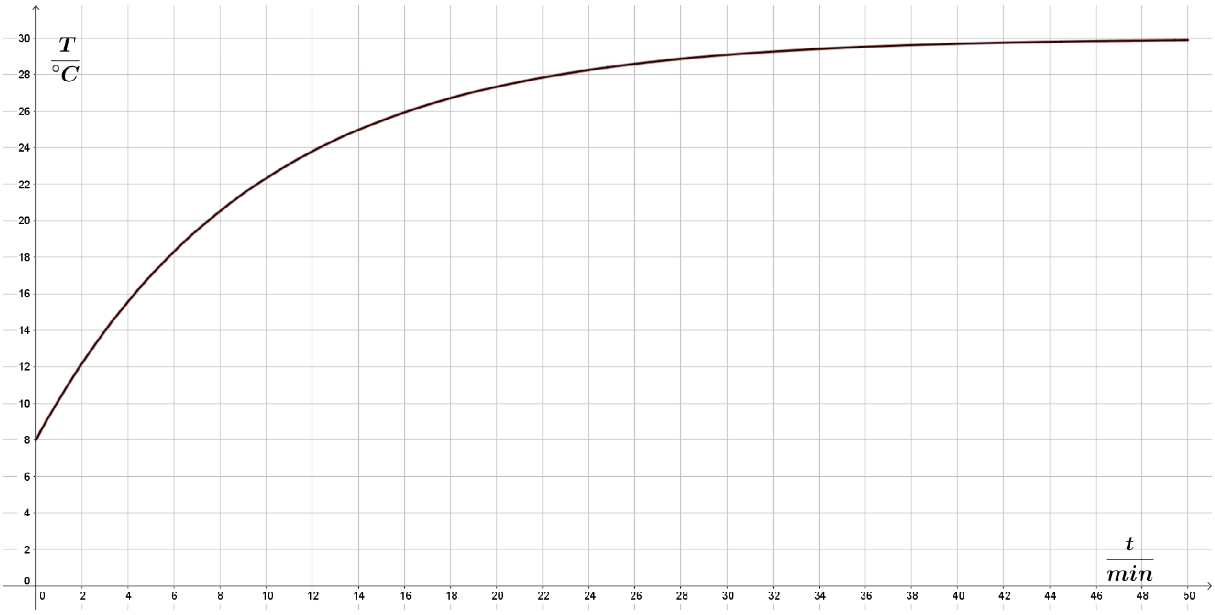
Die Temperatur steigt um 10% pro Minute.

$$b = e^{-0{,}105} = 0{,}9$$

$$1 - b = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 = 10\%$$

Wir könnten die Funktion daher auch wie folgt darstellen.

$$T(t) = 30 - 22 \cdot e^{-0{,}105t} = 30 - 22 \cdot 0{,}9^t$$



Nach etwas mehr als einer viertel Stunde 16,18 min, empfinden wir das Getränk als zu warm. Auf welchen wert ist die Temperatur gestiegen?

$$T(16{,}18) = 30 - 22 \cdot 0{,}9^{16{,}18} = 26\,°C$$

Abkühlung Wir stellen unser Getränk zurück in den Kühlschrank. Wie sieht die Funktion des Abkühlungsprozesses aus, wenn sich die Temperatur um 10% pro Minute verringert?

Da der Prozess bei einer Temperatur von 8 °C endet, handelt es sich um eine beschränkte Abnahme. Die konstante Reduzierung um 10% pro Minute lässt auf einen exponentiellen Verlauf schließen. Der Startwert liegt bei 26 °C. Daraus könnten wir alle notwendigen Unbekannten bestimmen.

$$S = 8\,°C$$

$$S - A = 26\,°C \Leftrightarrow A = 26\,°C - 8\,°C = 18\,°C$$

$$1 - b = 10\% \Leftrightarrow b = 90\% = 0{,}9$$

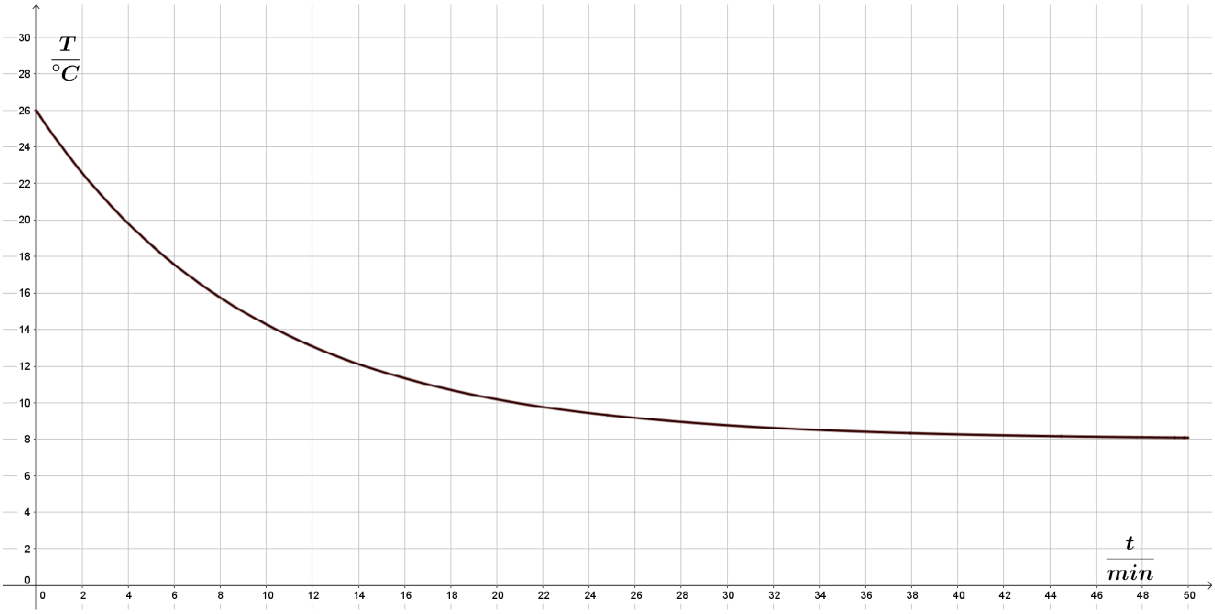
Eingesetzt erhalten wir den folgenden Funktionsterm.

$$T(t) = 8 + 18 \cdot 0{,}9^t$$

Beziehungsweise als e-Funktion.

$$c = \ln(b) = \ln(0{,}9) = -0{,}105$$

$$T(t) = 8 + 18 \cdot e^{-0{,}105t}$$



Stellt sich die Frage: Wie lange müssen wir nun warten um eine angenehme Trinktemperatur von 9 °C zu erreichen?

$$8 + 18 \cdot 0{,}9^t = 9$$

$$18 \cdot 0{,}9^t = 1$$

$$0{,}9^t = \frac{1}{18}$$

$$t = \log_{0,9}\left(\frac{1}{18}\right) = 27{,}43$$

Fast eine halbe Stunde Wartezeit ist notwendig, um die gewünscht Temperatur zu erreichen.

Damit schließen wir unsere Betrachtungen über Exponentialfunktionen ab. Zwar gibt es noch eine ganze Reihe von Beispielen für die Existenz von Exponentialfunktionen, deren Behandlung lässt sich aber mit den hier vorgestellten Techniken durchführen. Letztlich ist es wichtig herauszufinden welcher Typ einer Exponentialfunktion vorliegt und welches Werkzeug für die Lösung des Problems zielführend ist. Dazu sind auch Grundlagen wie Funktionsbegriff, Prozentrechnung oder Schnittpunktbestimmung hilfreich und notwendig.