Lambacher Schweizer
Mathematik

Sicher in die Oberstufe
Arbeitsheft nach dem mittleren Bildungsabschluss

erarbeitet von
Achim Olpp
Claus Stöckle
Bruno Weber
Rita Wurth

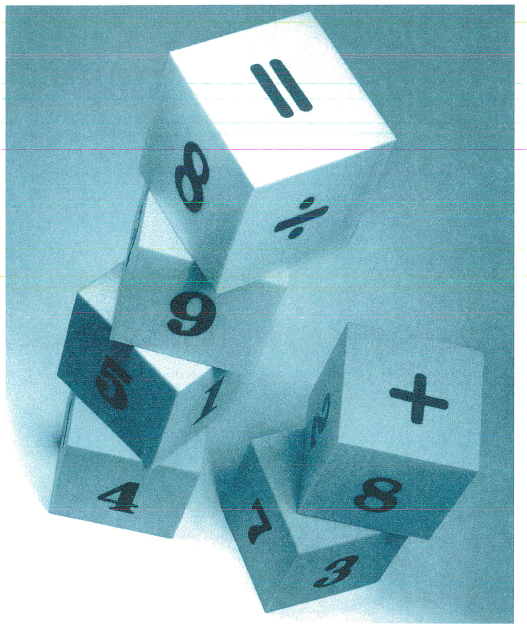
Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig

1 Terme

Dieses Kapitel ermöglicht Ihnen, alle wichtigen Aspekte im Umgang mit Termen zu wiederholen und intensiv zu üben.

Bevor Sie anfangen zu üben, sollten Sie eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 abgeben (erste Spalte in der unteren Tabelle).

Anschließend können Sie die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennen Sie Ihre Stärken und Schwächen, sodass ein gezieltes und effektives Üben möglich wird.



Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Kapitels
1. Ich kann Klammern auflösen und Terme anschließend zusammenfassen.			
2. Ich kann Terme ausmultiplizieren und anschließend vereinfachen.			
3. Ich kann bei Summen bzw. Differenzen gemeinsame Faktoren ausklammern (Faktorisieren).			
4. Ich kann geschachtelte Klammern auflösen.			
5. Ich kann die binomischen Formeln anwenden.			
6. Ich kann Terme kürzen bzw. erweitern. Beim Kürzen achte ich auf das Faktorisieren.			
7. Ich kann Bruchterme miteinander multiplizieren bzw. dividieren. Wenn möglich, kürze ich die Terme zunächst.			
8. Ich kann mithilfe der Potenzgesetze Terme umformen.			
9. Ich kann große bzw. kleine Zahlen in der Exponentialdarstellung schreiben.			
10. Ich kann mithilfe der Wurzelgesetze Terme vereinfachen.			
11. Ich kann zu vorgegebenen Problemen Terme erstellen und mithilfe dieser Terme auch Berechnungen vornehmen.			

Mithilfe der Testaufgaben 1 bis 11 können Sie die Punkte 1 bis 11 Ihrer Selbsteinschätzung von Seite 2 überprüfen. Bearbeiten Sie die Aufgaben. Anschließend können Sie mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten Ihre Lösungen kontrollieren.

1 Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie den Term.
a) $2a + (a - 2b) - (a - b)$

b) $2x - (x + 2y - z) - (x - 3y + 2z)$

2 Vereinfachen Sie durch Ausmultiplizieren.
a) $3x(2 - y) - y(2x - 5)$

b) $(t - 4s)(-2t - s)$

3 Vereinfachen Sie durch Faktorisieren.
a) $8x^2 + 12xy + 4x$

b) $15a^2b + 45ab - 30ab^2$

4 Achten Sie auf die Klammern.
a) $2a - (2b + (b - a))$

b) $-x((x - y) - x(y - 1))$

5 Formen Sie mithilfe der binomischen Formeln um.
a) $(3x - 4)^2$ b) $25s^2 - 49t^2$

6 Kürzen Sie. Denken Sie dabei auch an das Faktorisieren.
a) $\frac{24a^2b}{36ab^2}$ b) $\frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

7 Berechnen bzw. vereinfachen Sie den Bruchterm.
a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{6y}{x + 2} \cdot \frac{4x + 8}{12}$

8 Formen Sie mithilfe eines Potenzgesetzes um.
a) $2^{2n} \cdot 2^{n+1}$ b) $\frac{12^t}{4^t}$

9 Schreiben Sie in der Exponentialdarstellung.
a) 915 000 000 b) 0,000 000 52

10 Wenden Sie die Wurzelgesetze an.
a) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}$ b) $\frac{\sqrt{98xy^2}}{\sqrt{2x}}$

11 Der Freizeitpark FUTURA wirbt mit folgendem Preisangebot:

Kinder & Jugendliche	17 €
Erwachsene	22 €
Gruppe ab 20 Personen (eine Begleitperson frei)	12 €

a) Erstellen Sie einen Term zur Berechnung der Eintrittskosten (ohne Gruppentarif).
b) Berechnen Sie die Kosten für eine Schulklasse mit 27 Schülern und 2 Begleitpersonen.
c) Ehepaar Weiß und Ehepaar Schwarz bezahlen zusammen 207 Euro Eintritt.
Wie viele Kinder gehören zu den beiden Familien?

a)

b)

c)

1 Musterlösungen

Sie haben die Testaufgaben gelöst. Mithilfe der folgenden Musterlösungen können Sie Ihre Lösungen kontrollieren. Anschließend sollten Sie nochmals eine Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich von Termen vornehmen.

1 Klammern auflösen und zusammenfassen

Beim Auflösen der Minusklammern werden die Vorzeichen in der Klammer geändert.

a) $2a + (a - 2b) - (a - b) = 2a + a - 2b - a + b$
$= 2a - b$

b) $2x - (x + 2y - z) - (x - 3y + 2z) = 2x - x - 2y + z - x + 3y - 2z$
$= y - z$

Auflösen von Klammern:
Bei Minusklammern ändern sich die Vorzeichen in der Klammer, sonst bleiben sie gleich.

2 Vereinfachen durch Ausmultiplizieren

a) Zunächst multipliziert man aus. Anschließend fasst man zusammen.

$3x(2 - y) - y(2x - 5)$
$= 3x \cdot 2 - 3x \cdot y - y \cdot 2x + y \cdot 5$
$= 6x - 3xy - 2xy + 5y$
$= 6x - 5xy + 5y$

b) Beim Ausmultiplizieren von Summen wird jeder Summand der ersten Summe mit jedem Summand der zweiten Summe multipliziert.

$(t - 4s)(-2t - s)$
$= -2t^2 - st + 8st + 4s^2$
$= 4s^2 + 7st - 2t^2$

Ausmultiplizieren:
$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a + b)(c + d) =$
$a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

3 Ausklammern von gemeinsamen Faktoren (Faktorisieren)

Haben die einzelnen Werte einer Summe bzw. einer Differenz gemeinsame Faktoren, lassen sich diese ausklammern (Faktorisieren).

a) $8x^2 + 12xy + 4x$
$= 4x(2x + 3y + 1)$

b) $15a^2b + 45ab - 30ab^2$
$= 15ab \cdot a + 15ab \cdot 3 - 15ab \cdot 2b$
$= 15ab(a + 3 - 2b)$

Ausklammern:
(Faktorisieren)
$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$

4 Klammern ausmultiplizieren

Zunächst werden die inneren Klammern aufgelöst, dann die äußeren.

a) $2a - (2b + (b - a))$
$= 2a - (2b + b - a)$
$= 2a - 2b - b + a$
$= 3a - 3b$

b) $-x((x - y) - x(y - 1))$
$= -x(x - y - xy + x)$
$= -x^2 + xy + x^2y - x^2$
$= xy + x^2y - 2x^2$

„Vorfahrtsregeln" der Algebra:
(1) Punkt vor Strich
(2) Klammern zuerst

5 Umformen mit binomischen Formeln

a) Anwenden der 2. binomischen Formel:
$(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

b) Anwenden der 3. binomischen Formel:
$25s^2 - 49t^2 = (5s + 7t)(5s - 7t)$

Binomische Formeln:
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

6 Vereinfachen von Bruchtermen

a) Beim Kürzen von Bruchtermen werden Variablen mit Variablen und Zahlen mit Zahlen gekürzt.

$\frac{24a^2b}{36ab^2} = \frac{2 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b}}{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot \cancel{b}} = \frac{2a}{3b}$

b) Das Ausklammern (Faktorisieren) ermöglicht häufig die Vereinfachung von Termen.

$\frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2}{x - 1}$ mit $x \neq 1$

Erweitern und Kürzen:
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ mit $n \neq 0$

Faktorisieren:
$ax + ay = a(x + y)$

7 Berechnen von Bruchtermen

a) Zunächst multipliziert man die Klammer aus.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{12}$$

b) Es ist hilfreich, vor dem Kürzen zu faktorisieren.

$$\frac{6y}{x+2} \cdot \frac{4x+8}{12} = \frac{6y}{x+2} \cdot \frac{4(x+2)}{12}$$
$$= \frac{6y}{12} \cdot \frac{4(x+2)}{x+2}$$
$$= 2y$$

Multiplizieren:
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ mit b, d ≠ 0

Dividieren:
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

8 Umformen mithilfe der Potenzgesetze

a) Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert bzw. dividiert, indem man die Exponenten addiert bzw. subtrahiert und die Basis belässt.

$$2^{2n} \cdot 2^{n+1} = 2^{2n+(n+1)}$$
$$= 2^{3n+1}$$

b) Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert bzw. dividiert, indem man die Basen multipliziert bzw. dividiert und den Exponenten belässt.

$$\frac{12^t}{4^t} = \left(\frac{12}{4}\right)^t$$
$$= 3^t$$

Potenzgesetze:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
$a^m : b^m = (a : b)^m$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

9 Große und kleine Zahlen – wissenschaftliche Schreibweise

Sehr große und sehr kleine Zahlen lassen sich in der so genannten wissenschaftlichen Schreibweise (Exponentialdarstellung) schreiben. Dadurch werden die Zahlen übersichtlicher und lassen sich besser vergleichen.

a) $915\,000\,000 = 915 \cdot 1\,000\,000$
$= 9{,}15 \cdot 10^8$

b) $0{,}00000052 = 52 \cdot 10^{-8}$
$= 5{,}2 \cdot 10^{-7}$

Exponentialdarstellung:
Zahlen werden in die Form $a \cdot 10^m$ bzw. $a \cdot 10^{-m}$ gebracht, wobei $1 \leq a < 10$.

10 Umformen mithilfe der Wurzelgesetze

Wurzeln kann man miteinander multiplizieren bzw. dividieren, indem man die Radikanden miteinander multipliziert bzw. dividiert und dann die Wurzel zieht.

a) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x} = \sqrt{2x \cdot 8x}$
$= \sqrt{16x^2} \quad | \sqrt{\ }$
$= 4x$

b) $\frac{\sqrt{98xy^2}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{98xy^2}{2x}}$
$= \sqrt{49y^2} \quad | \sqrt{\ }$
$= 7y$

Wurzelgesetze:
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ mit a, b ≧ 0
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ mit a ≧ 0 und b > 0

11 Terme in Anwendungssituationen aufstellen und berechnen

a) Für die Anzahl der Erwachsenen bzw. der Kinder und Jugendlichen werden verschiedene Variablen festgelegt.

Kosten für x Kinder und Jugendliche:	$17 \cdot x$
Kosten für y Erwachsene:	$22 \cdot y$
Gesamtkosten:	$17x + 22y$

b) Zur Berechnung der Gesamtkosten für eine Schulklasse und die beiden Begleitpersonen müssen die Sonderkonditionen miteinbezogen werden.

Anzahl der Schüler mit Sondertarif:	z
Kosten für alle Schüler der Klasse:	$12 \cdot z$
Term für die Gesamtkosten:	$12 \cdot z + 22 \cdot y$
Gesamtkosten:	$12\,€ \cdot 27 + 22\,€ \cdot 1 = 346\,€$

c) Gleichung (4 Eltern berücksichtigt): $207\,€ = 17\,€ \cdot x + 22\,€ \cdot 4$
$x = 7$

Ergebnis: Beide Familien haben zusammen 7 Kinder.

Terme aufstellen und berechnen:
Für unbekannte Zahlen oder Größen werden Variablen festgelegt. Danach lässt sich der Term aufstellen.

Wenn man Terme aufstellt oder gleichsetzt, sollten die Einheiten bei allen Werten gleich sein.

1 Übungsaufgaben

Hier finden Sie sowohl Standardaufgaben, die den Testaufgaben ähneln, als auch vertiefende Aufgaben, die erhöhte Anforderungen verlangen. An einzelnen Stellen werden Themen aufbereitet, die über den Standardbereich hinausgehen. Diese Stellen sind als EXKURS gekennzeichnet.

1 Klammern auflösen und Terme zusammenfassen

Vereinfachen Sie.

a) $3x + y - (x + 2y)$

b) $3m + (m + 7n) - (2m + 5n)$

c) $(4a - b) - (a - 2b) + b$

d) $-(2y - 3x) - x - (x + 2y)$

e) $-\left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{4}z\right) + \left(-x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)$

f) $3{,}25x^2 - \left(\frac{1}{5}xy + 0{,}25y^2\right) - \left(\frac{3}{4}x^2 - 0{,}8xy - \frac{1}{2}y^2\right)$

2 Ausmultiplizieren und zusammenfassen

Vereinfachen Sie die Terme.

a) $4a(2 - 7b)$

b) $3x(2 - y) + y(1 - x)$

c) $-3m(1 + 2n) - 4(m - n) + 6mn$

d) $(12s - t)(s + 12t)$

e) $2(x - 2y)(2x - y)$

f) $-a(a - 3b) - 3(3a - b)(a - b)$

3 Faktorisieren

Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus.

a) $14xy - 28y$

b) $15x^2y - 25xy^2$

c) $33a^2b + 77ab - 11ab^2$

d) $64x^2y - 48xy + 96xy^2$

e) $81a^2bc - 54abc^2 + 27ab^2c - 135abc$

f) $3a^2 + a - 3ab - b$

4 Klammern auflösen

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $3a + (b - (a + 2b))$

b) $2x - ((y + 3x) - 2y)$

c) $((3c - 2d) \cdot 8 + 8c) : 16$

d) $x - (2xy - (2x - 2(x + y)) - 2xy)$

5 Umformen mit binomischen Formeln

Lösen Sie mithilfe der binomischen Formeln die Klammern auf.

a) $(2a + 3)^2$ b) $(x - 3y)^2$ c) $(7s - t)(7s + t)$ d) $(-u + v)^2$

Faktorisieren Sie mithilfe der binomischen Formeln.

e) $16x^2 + 40xy + 25y^2$ f) $100r^2 - 20r + 1$ g) $121a^2b^4 - 289a^4b^2$ h) $27x^2z - 48y^2z$

6 Vereinfachen von Bruchtermen

Vereinfachen Sie die Bruchterme. Denken Sie ans Kürzen und Faktorisieren.

a) $\frac{48x^2y}{64xy^2}$ b) $\frac{125abc^2}{25abc}$ c) $\frac{x^2 - 4x + 4}{3x - 6}$ d) $\frac{49x^2 - 81y^2}{14x + 18y}$

7 Berechnen von Bruchtermen

a) $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2}$ c) $\frac{7ab}{36} \cdot \frac{54a}{14b}$ d) $\frac{15u}{v+1} : \frac{30u^2}{v^2 - 1}$

EXKURS – Pascal'sches Dreieck

Das nach dem Franzosen Blaise Pascal (1623–1662) benannte Dreieck bietet interessante Einblicke in die Zusammenhänge von Zahlen und Termen.

a) Erklären Sie, wie eine Zeile aus der vorhergehenden entsteht. Wie lautet die siebte Zeile, wie die achte?

1	1. Zeile
1 1	2. Zeile
1 2 1	3. Zeile
1 3 3 1	4. Zeile
1 4 6 4 1	5. Zeile
1 5 10 10 5 1	6. Zeile

b) Berechnen Sie die Terme.

$(a + b)^2$

$(a + b)^3$

$(a + b)^4$

Wie hängen die Terme mit dem Pascal'schen Dreieck zusammen? Können Sie auch erklären, wie die erste und zweite Zeile des Pascal'schen Dreiecks zustande kommen?

Die blau gefärbten Zahlen sind die Folge der natürlichen Zahlen. Die grau gefärbten Zahlen sind die sogenannten Dreieckszahlen.

1 3 6 10

c) Erklären Sie, wie die Dreieckszahlen entstehen. Prüfen Sie die Zahlen mit dem Term $\frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ nach und finden Sie weitere.

8 Umformen mithilfe der Potenzgesetze

Vereinfachen Sie mithilfe der Potenzgesetze.

a) $5^3 \cdot 5^4$ b) $\frac{7^{11}}{7^8}$ c) $3^{-5} \cdot 2^{-5}$ d) $(2^3)^4$

e) $\frac{(x+1)^4}{x+1}$ f) $3^a \cdot 3^{a+2}$ g) $\frac{32x^5}{2^5}$ h) $(a^{n+1})^{n-1}$

9 Große und kleine Zahlen – wissenschaftliche Schreibweise

a) Schreiben Sie in der wissenschaftlichen Schreibweise.

835 000 000 0,000 000 002 5 20 130 000 000 000 9,65 Billionen

b) Schreiben Sie ausführlich.

$2{,}8 \cdot 10^9$ $3{,}28 \cdot 10^{-7}$ $2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ 1 Milliardstel

c) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner und geben Sie das Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise an.

$987\,654\,321 \cdot 123\,456\,789$ $0{,}000\,004\,68 : 50\,000\,000\,000$

10 Umformen mithilfe der Wurzelgesetze

a) Vereinfachen Sie mithilfe der Wurzelgesetze.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{105}} \cdot \sqrt{12}$ $\sqrt{32xy^2} : \sqrt{2x}$ $\frac{\sqrt{3x^3y} \cdot 2\sqrt{x^2}}{\sqrt{48xy}}$

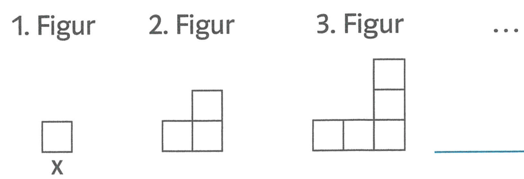
b) Ziehen Sie die Wurzel so weit wie möglich. Fassen Sie, wenn möglich, zusammen.

$\sqrt{32}$ $\sqrt{128a^3}$ $\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$ $\sqrt{27st^2} - t\sqrt{48s}$

11 Terme aufstellen und berechnen

a) **Quadratfigur**

Die Abbildung zeigt die ersten drei Figuren einer Reihe. Dabei werden Quadrate mit der Seitenlänge x in der dargestellten Weise aneinandergesetzt. Zeichnen Sie die nächsten drei Figuren der Reihe.

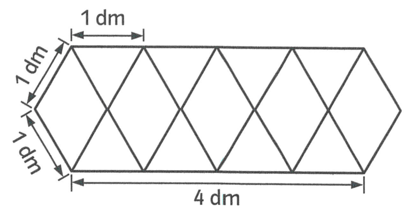


Die Anzahl der Quadrate der n-ten Figur lässt sich mit dem Term $2n - 1$ berechnen.
Aus wie vielen Quadraten besteht die 100. Figur?

Erstellen Sie einen Term für den Umfang der n-ten Figur.

Erstellen Sie einen Term, mit dem man den Flächeninhalt der n-ten Figur in Abhängigkeit der Länge x der Quadratseite berechnen kann.

b) **Gitterfigur**
Das abgebildete Gitter mit der Grundlänge 4 dm besteht aus 28 gleich langen Teilstreben.



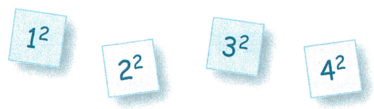
Wie viele Streben benötigt man, um ein Gitter nach obigem Muster mit einer Grundlänge von 7 dm herzustellen?

Erstellen Sie einen Term zur Berechnung der Gesamtanzahl der verwendeten Streben.

Mit welcher Anzahl von Teilstreben lässt sich ein Gitter erstellen, ohne dass Streben übrig bleiben?

☐ 50 ☐ 51 ☐ 52 ☐ 53

c) **Quadratsummen**
Svenja meint: „Die Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer eine gerade Zahl." Hat Sie recht?

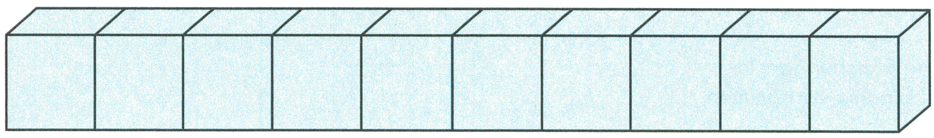


Wählen Sie vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen aus und überprüfen Sie die Behauptung.

Erstellen Sie einen Term für die Summe von vier aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und vereinfachen Sie ihn.

Wie muss Svenja ihre Aussage ändern, wenn sie nur drei aufeinanderfolgende Quadratzahlen addiert?

d) **Würfelkörper**
Die Figur zeigt einen Würfelzehnling. Er besteht aus 10 aneinandergesetzten Würfeln.
Sein Oberflächeninhalt beträgt 4200 cm^2.



Bestimmen Sie die Gesamtlänge aller Außenkanten und das Volumen des Körpers.

Ein Würfelhundertling besteht aus 100 zusammengesetzten Würfeln. Erstellen Sie einen Term für die Berechnung des Oberflächeninhalts.

Ein Würfelhundertling hat eine Oberfläche von 10 050 cm^2. Berechnen Sie sein Volumen.

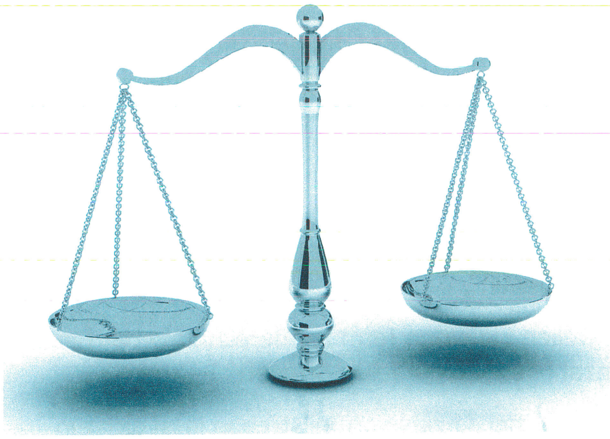
Ein Würfelhundertling hat ein Volumen von 100 dm^3.
Ein Würfelzehnling hat dasselbe Volumen.
Um wie viele Quadratzentimeter unterscheiden sich die Oberflächen der beiden Körper?

2 Gleichungen

Dieses Kapitel ermöglicht Ihnen, alle wichtigen Aspekte im Umgang mit linearen und quadratischen Gleichungen zu wiederholen und intensiv zu üben.

Bevor Sie anfangen zu üben, sollten Sie eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 abgeben (erste Spalte in der unteren Tabelle).

Anschließend können Sie die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennen Sie Ihre Stärken und Schwächen und können nun gezielt üben.



Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Kapitels
1. Ich kann lineare Gleichungen mit einer Variablen, auch mit Klammern und Brüchen, sicher lösen.			
2. Ich kann Formeln (Gleichungen mit mehreren Variablen) nach ihren Variablen auflösen.			
3. Ich kann lineare Gleichungen grafisch lösen.			
4. Ich kann rein quadratische Gleichungen sicher lösen.			
5. Ich kann vollständig gemischt quadratische Gleichungen mit der Lösungsformel sicher lösen.			
6. Ich kann quadratische Gleichungen, in denen Klammern und Binome vorkommen, sicher lösen.			
7. Ich kann von einfachen Bruchgleichungen die Definitionsmenge und die Lösungsmenge bestimmen.			
8. Ich kann überprüfen, ob eine Zahl Lösung einer Gleichung ist.			
9. Ich kann Sachsituationen, die sich mit einer Gleichung darstellen lassen, rechnerisch lösen.			

Die Aufgaben 1 bis 9 beziehen sich auf die Punkte 1 bis 9 der Selbsteinschätzung. Bearbeiten Sie die Aufgaben und kontrollieren Sie dann Ihre Lösung mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten.

1 Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

a) $22x + (3x - 19) - (11x - 15) = 25 - (17 - 13x)$

$x =$ ____________

b) $(x - 5)(x + 8) = (x - 2)(x + 1) + 6$

$x =$ ____________

Beachten Sie die Binome.

c) $(x - 1)^2 - (x - 4)^2 = (x + 3)^2 - (x + 2)^2$

$x =$ ____________

d) $(x + 2)^2 = (x + 1)(x - 1)$

$x =$ ____________

e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

$x =$ ____________

f) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{12}$

$x =$ ____________

2 Lösen Sie die Formel nach allen Variablen auf.

a) $v = \frac{s}{t}$

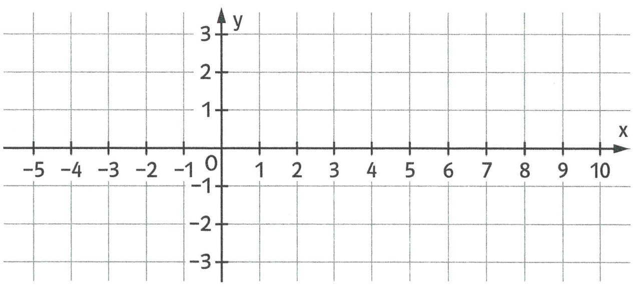
$s =$ ________ $t =$ ________

b) $u = 2(a + b)$

$a =$ ________ $b =$ ________

3 Lösen Sie die Gleichung grafisch (zeichnerisch).

a) $3x - 3 = 0$ b) $\frac{1}{3}x = 2$



4 Bestimmen Sie die Lösungen der rein quadratischen Gleichung.

a) $5x^2 - 12 = 3x^2 + 60$ b) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3} = \frac{3}{8}x^2 - 1\frac{1}{3}$

________ ________

c) $8(x^2 + 1) + 3 = -5$ d) $(3x + 1)(3x - 1) = 15$

________ ________

5 Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung mit der Lösungsformel.

a) $x^2 + 5x - 8 = 0$ b) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

$x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____ $x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____

c) $2x^2 + 32 = 16x$ d) $3x^2 = 42 - 39x$

$x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____ $x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____

6 Lösen Sie die quadratische Gleichung.

a) $3x(2x + 5) = x - 2(2x + 6)$

$x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____

b) $14x - (x + 3)^2 = 3(x^2 - 7)$

$x_1 =$ ____ und $x_2 =$ ____

7 Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

a) $\frac{4}{x} + 5 = 4 + \frac{x}{2}$ ____________

b) $4 - \frac{2x + 1}{3} = \frac{9}{2x + 1}$ ____________

c) $\frac{x}{2x - 3} = \frac{3}{4x - 6} + \frac{1}{2x}$ ____________

8 Prüfen Sie, ob die gegebene Zahl Lösung der Gleichung ist.

a) $x = 2$ für $3x + 2 = 8 - 3(2 - x)$

____

b) $x = -3$ für $9 + 2x - x^2 = 2x$

____

c) $x = -4$ für $\frac{4x + 5}{5} = \frac{4}{x + 4} - 1$

____

9 Frau Schwarz möchte für 10 Tage ins 800 km entfernte Flensburg fahren. Sie hat zwei Mietwagenangebote:

Drive Safe	Top Car
Pro Tag 59,90 €	Pro Tag 38,50 €
Ohne Kilometerbegrenzung	Pro Kilometer 0,24 €

Vergleichen Sie.

____

____

2 Musterlösungen

Kontrollieren Sie mithilfe der folgenden Musterlösungen die Lösungen der Testaufgaben. Führen Sie dann eine erneute Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich Gleichungen durch.

1 Lineare Gleichungen lösen

a) $22x + (3x - 19) - (11x - 15) = 25 - (17 - 13x)$

$22x + 3x - 19 - 11x + 15 = 25 - 17 + 13x$

$14x - 4 = 8 + 13x \quad | -13x + 4$

$x = 12$

b) $(x - 5)(x + 8) = (x - 2)(x + 1) + 6 \quad |$ Klammern ausmultiplizieren

$x^2 - 5x + 8x - 40 = x^2 - 2x + x - 2 + 6 \quad |$ Zusammenfassen

$x^2 + 3x - 40 = x^2 - x + 4 \quad | -x^2 + x + 40$

$4x = 44 \quad | : 4$

$x = 11$

c) $(x - 1)^2 - (x - 4)^2 = (x + 3)^2 - (x + 2)^2 \quad |$ 1. und 2. bin. Formel

$x^2 - 2x + 1 - x^2 + 8x - 16 = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 4x - 4$

$6x - 15 = 2x + 5 \quad | -2x + 15$

$4x = 20 \quad | : 4$

$x = 5$

d) $(x + 2)^2 = (x + 1)(x - 1) \quad |$ 1. und 3. bin. Formel

$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 1 \quad | -x^2 - 4$

$4x = -5 \quad | : 4$

$x = -\frac{5}{4}$

Gleichungen mit Brüchen

e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \quad | -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

$\frac{x}{6} = \frac{1}{6} \quad | \cdot 6$

$x = 1$

f) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{12} \quad | \cdot 12$

$4x + 9 = -3x + 23 \quad | +3x - 9$

$7x = 14 \quad | : 7$

$x = 2$

Äquivalenzumformungen:
Um eine Gleichung zu lösen, muss man sie so lange umformen, bis x auf einer Seite alleine steht.
Diese Umformungsschritte nennt man Äquivalenzumformungen.

Bei den Termumformungen muss man auf die Regeln achten, die im Kapitel Terme besprochen wurden.

Binomische Formeln:
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Brüche in Gleichungen:
Treten in Gleichungen Brüche auf, so ist es vorteilhaft, wenn man die Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultipliziert.
Nach dem Kürzen ist die Gleichung nennerfrei.

2 Formeln auflösen

a) $v = \frac{s}{t} \quad | \cdot t$

$v \cdot t = s \quad | : v$; aufgelöst nach s

$t = \frac{s}{v} \quad |$ aufgelöst nach t

b) $u = 2(a + b) \quad | : 2$

$\frac{u}{2} = a + b \quad | -b$

$a = \frac{u}{2} - b \quad |$ aufgelöst nach a

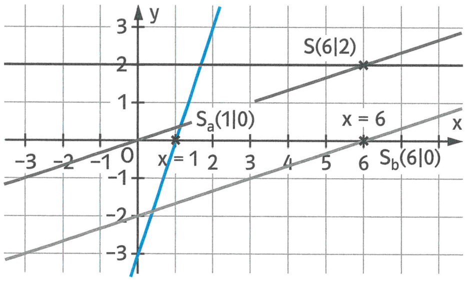
entsprechend ist $b = \frac{u}{2} - a \quad |$ aufgelöst nach b

Formeln auflösen:
Man behandelt die Formeln wie Gleichungen und wendet dieselben Äquivalenzumformungen an.

3 Grafische Lösung von linearen Gleichungen

a) Die Gleichung $3x - 3 = 0$ lässt sich mit der Geraden $y = 3x - 3$ und der x-Achse ($y = 0$) darstellen. Der x-Wert des Schnittpunkts ist die Lösung der Gleichung.

b) Die Gleichung $\frac{1}{3}x = 2$ kann entweder umgeformt werden in $\frac{1}{3}x - 2 = 0$ oder es wird der Schnittpunkt von $y = \frac{1}{3}x$ mit der Parallelen zur x-Achse $y = 2$ ermittelt.



Grafische Lösung:
Lineare Gleichungen der Form $ax + c = 0$ kann man grafisch lösen, indem man den Schnittpunkt der Geraden $y = ax + c$ mit der x-Achse ermittelt.

4 Rein quadratische Gleichungen

a)
$$\begin{aligned} 5x^2 - 12 &= 3x^2 + 60 && \mid -3x^2 + 12 \\ 2x^2 &= 72 && \mid :2 \\ x^2 &= 36 && \mid \pm\sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{36} \\ x_1 = 6;\ x_2 &= -6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{4}{3} &= \tfrac{3}{8}x^2 - 1\tfrac{1}{3} && \mid \cdot 24 \\ 12x^2 - 32 &= 9x^2 - 32 && \mid -9x^2 + 32 \\ 3x^2 &= 0 && \mid :3 \\ x^2 &= 0 && \mid \pm\sqrt{} \\ x_1 = x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat nur eine Lösung.

c) $8(x^2 + 1) + 3 = -5$
$$\begin{aligned} 8x^2 + 8 + 3 &= -5 && \mid -11 \\ 8x^2 &= -16 && \mid :8 \\ x^2 &= -2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer, da die Wurzel einer negativen Zahl nicht existiert.

d) $(3x + 1)(3x - 1) = 15$
$$\begin{aligned} 9x^2 - 1 &= 15 && \mid +1 \\ 9x^2 &= 16 && \mid :9 \\ x^2 &= \tfrac{16}{9} && \mid \pm\sqrt{} \\ x_1 = \tfrac{4}{3};\ x_2 &= -\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Rein quadratische Gleichungen:
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$ nennt man rein quadratisch.

Lösungsverfahren:
Man löst die Gleichung nach x^2 auf und zieht dann die Wurzel.

Der Wert von x^2 entscheidet über die Anzahl der Lösungen.

5 Lösen von quadratischen Gleichungen mit der Lösungsformel

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + 6} \\ x_{1,2} &= -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{7}{2} \\ x_1 = 1;\ x_2 &= -6 \end{aligned}$$

b) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ $\mid :3$ Umformen in die normierte Form
$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= +\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 2} \\ x_{1,2} &= +\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} \\ x_1 = 2;\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Lösungsformel:
(„Mitternachtsformel“)
Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ können mit der **pq-Formel**
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
gelöst werden.

c)
$$2x^2 + 32 = 16x \qquad | -16x$$
$$2x^2 - 16x + 32 = 0 \qquad | :2$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0 \qquad | \text{ Faktorisieren}$$
$$(x-4)^2 = 0$$
$$x - 4 = 0$$
Die Gleichung hat nur eine Lösung, nämlich 4.

d)
$$3x^2 = 42 - 39x \qquad | +39x - 42$$
$$3x^2 + 39x - 42 = 0 \qquad | :3$$
$$x^2 + 13x - 14 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - (-14)}$$
$$x_{1,2} = -6{,}5 \pm \sqrt{6{,}5^2 + 14}$$
$$x_1 = 1; \quad x_2 = -14$$

Vorsicht!
Vor Anwendung der pq-Formel muss die Gleichung zuerst in die **normierte Form** $x^2 + px + q = 0$ umgeformt werden.

Die **abc-Formel** kann man direkt anwenden.
(Siehe Seite 18.)

6 Gemischt quadratische Gleichungen

a)
$$3x(2x+5) = x - 2(2x+6)$$
$$6x^2 + 15x = x - 4x - 12 \qquad | +3x + 12$$
$$6x^2 + 18x + 12 = 0 \qquad | :6$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$
$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_1 = -1; \quad x_2 = -2$$

b)
$$14x - (x+3)^2 = 3(x^2 - 7)$$
$$14x - x^2 - 6x - 9 = 3x^2 - 21 \qquad | +x^2 - 8x + 9$$
$$4x^2 - 8x - 12 = 0 \qquad | :4$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1^2 + 3}$$
$$x_{1,2} = +1 \pm 2$$
$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$$

Den Radikanden der Lösungsformel $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ nennt man **Diskriminante**. Mit diesem Wert kann man die Anzahl der Lösungen bestimmen.
(Siehe Seite 19.)

7 Lösen einer Bruchgleichung

a)
$$\frac{4}{x} + 5 = 4 + \frac{x}{2} \qquad | -4$$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$$\frac{4}{x} + 1 = \frac{x}{2} \qquad | \cdot 2x$$
$$8 + 2x = x^2 \qquad | -2x - 8$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1^2 + 8}$$
$$x_1 = 4; \quad x_2 = -2$$
4 und −2 sind in der Definitionsmenge enthalten, sind also Lösungen der Bruchgleichung. Lösungsmenge $L = \{4; -2\}$.

b)
$$4 - \frac{2x+1}{3} = \frac{9}{2x+1} \qquad | \cdot 3(2x+1)$$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\}$
$$12(2x+1) - (2x+1)(2x+1) = 27$$
$$24x + 12 - 4x^2 - 4x - 1 = 27 \qquad | -27$$
$$-4x^2 + 20x - 16 = 0 \qquad | :(-4)$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x_{1,2} = +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$$
$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1$$
Die Zahlen 1 und 4 sind in der Definitionsmenge enthalten, sind also Lösungen der Bruchgleichung. Lösungsmenge $L = \{1; 4\}$.

Bruchgleichungen:
Gleichungen, in denen die Gleichungsvariable im Nenner vorkommt, nennt man Bruchgleichungen.

Lösungsvorgang:
1. Zuerst legt man die Definitionsmenge der Buchgleichung fest.
2. Durch Multiplizieren mit dem Hauptnenner erhält man eine Gleichung ohne Bruchterme.
3. Man vergleicht die Lösungen mit der Definitionsmenge.
4. Die Lösungsmenge wird angegeben.

Definitionsmenge:
Zur Definitionsmenge einer Bruchgleichung gehören alle Zahlen, die in die Bruchterme eingesetzt werden dürfen.

c) $\frac{x}{2x-3} = \frac{3}{4x-6} + \frac{1}{2x}$ $\quad | \cdot \text{HN}$

Der Hauptnenner ist $2x(2x-3)$, da sich $4x-6$ als Produkt $2(2x-3)$ darstellen lässt. Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{1{,}5;\ 0\}$

$$2x^2 = 3x + 2x - 3 \quad | -5x+3$$
$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad | :2$$
$$x^2 - 2{,}5x + 1{,}5 = 0$$
$$x_{1,2} = +\frac{2{,}5}{2} \pm \sqrt{(1{,}25)^2 - 1{,}5}$$
$$x_{1,2} = +1{,}25 \pm 0{,}25$$
$$x_1 = 1{,}5;\quad x_2 = 1$$

Die Zahl 1,5 muss ausgeschlossen werden, da die Zahl nicht zur Definitionsmenge gehört. Lösungsmenge $L = \{1\}$.

Lösungsmenge:
Zur Lösungsmenge einer Bruchgleichung gehören alle Zahlen, die die Gleichung erfüllen und in der Definitionsmenge enthalten sind.

8 Lösungen überprüfen

a) $3x + 2 = 8 - 3(2 - x)$

Probe für $x = 2$:

Linke Seite: $3 \cdot 2 + 2 = 8$

Rechte Seite: $8 - 3(2 - 2) = 8$

Die Zahl 2 ist Lösung der Gleichung.

Zur Kontrolle kann man eine **Probe** machen, indem man die Lösung in die ursprüngliche Gleichung einsetzt.

b) $9 + 2x - x^2 = 2x$

Probe für $x = -3$:

Linke Seite: $9 + 2 \cdot (-3) - (-3)^2 = -6$

Rechte Seite: $2 \cdot (-3) = -6$

Die Zahl −3 ist Lösung der quadratischen Gleichung.

c) $\frac{4x+5}{5} = \frac{4}{x+4} - 1$

Probe für $x = -4$:

$$\frac{4 \cdot (-4) + 5}{5} = \frac{4}{-4+4} - 1$$
$$\frac{-11}{5} = \frac{4}{0} - 1$$

Beim Einsetzen in den rechten Term der Bruchgleichung erhält man eine nicht zulässige Division durch Null.
−4 muss als Lösung für die Bruchgleichung ausgeschlossen werden, da die Zahl nicht zur Definitionsmenge gehört.

Definitionsmenge beachten!
Nicht immer sind alle Lösungen für die Bruchgleichung zulässig.
Zur Bestimmung der Lösungsmenge müssen die Lösungen mit der Definitionsmenge abgeglichen werden.
So kann auf eine Probe verzichtet werden.

9 Sachprobleme rechnerisch lösen

Die beiden Angebote müssen mit 10 Tagen und 800 km durchgerechnet werden.
Tagespauschale: x
Kilometerpauschale: y
Drive Safe:

$x \cdot 10$

$59{,}90\,€ \cdot 10 = 599{,}00\,€$

Der Endpreis beträgt 599,00 €, da keine Kilometer berechnet werden.

Top Car:

$x \cdot 10 + y \cdot 800$

$38{,}50\,€ \cdot 10 + 0{,}24\,€ \cdot 800 = 385{,}00\,€ + 192{,}00\,€$
$= 577{,}00\,€$

Der Endpreis beträgt 577,00 €.

Frau Schwarz sollte den Mietwagen bei Top Car leihen, sie spart dabei 22,00 €.

Für **Sachsituationen** muss zunächst ein mathematisches Modell gefunden werden. Das Ergebnis der Berechnung muss anhand der Sachsituation überprüft werden.

2 Übungsaufgaben

Hier finden Sie sowohl Übungsaufgaben, die den Testaufgaben ähneln, als auch vertiefende Aufgaben, die einen etwas höheren Schwierigkeitsgrad haben. Daher helfen Ihnen am Anfang die Musterlösungen des Tests, wenn Sie nicht wissen, wie man bei der Lösung der Aufgabe vorgehen soll.
An einzelnen Stellen werden Themen vertieft und etwas weiter gedacht. Diese Stellen sind als EXKURS gekennzeichnet.

1 Lineare Gleichungen lösen

Achten Sie auf die Klammern

a) $5x - (3x - 2) = 11 - x$

x = ______

b) $(5x + 4) - 11 = 12x - (3x + 7)$

x = ______

c) $11 - 6(6x - 1) + 3(2 + x) = 8 - 8x$

x = ______

d) $7(4x - 3) - 9(2x + 1) = 2(x - 9)$

x = ______

e) $56 - 31x + (28 + 7x) = 25x - (12 + x)$

x = ______

f) $(x + 6)(x - 1) = (x + 5)(x - 2)$

x = ______

Achten Sie auf die Binome.

g) $(x - 5)^2 = (x + 6)^2$

x = ______

h) $-(2x - 1)^2 = 8 - (2x + 1)^2$

x = ______

i) $(x + 3)^2 = (3x + 1)^2 - 2(2x - 2)^2$

x = ______

j) $(3x + 7)^2 - 1 = (5x + 3)(5x - 3) - (4x + 3)^2$

x = ______

Achten Sie auf die Brüche.

k) $\frac{7x}{5} - 4 = \frac{5x}{3}$

x = ______

l) $\frac{3x - 1}{3} - \frac{x - 4}{2} = \frac{5x}{6}$

x = ______

m) $\frac{5x - 7}{2} - \frac{2x + 7}{3} = 3x - 14$

x = ______

n) $\frac{x + 4}{3} - \frac{x - 4}{5} = 2 + \frac{3x - 1}{15}$

x = ______

2 Formeln auflösen

Lösen Sie die Formel nach ihren Variablen auf.

a) $A = ab$

a = ______ b = ______

b) $V = a^2 h$

h = ______ a = ______

c) $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c)h$

a = ______ h = ______

d) $A = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)$

r_1 = ______ r_2 = ______

e) $F = \frac{mv^2}{r}$

m = ______ r = ______

V = ______

f) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

R = ______ R_1 = ______

R_2 = ______

3 Grafische Lösung von linearen Gleichungen

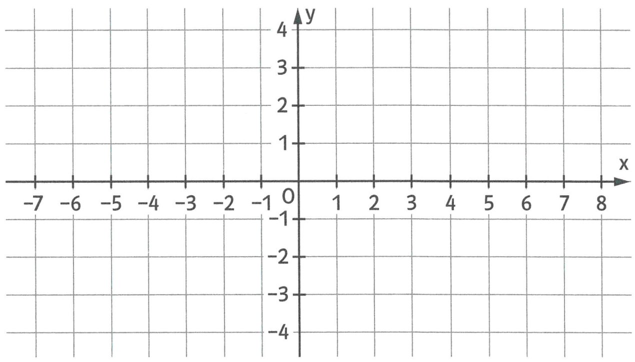
Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung zeichnerisch.

a) $2x - 4 = 0$ b) $2 + x = 0$

x = ______________ x = ______________

c) $\frac{1}{2}x + 3 = 0$ d) $\frac{2}{3}x = 4$

x = ______________ x = ______________

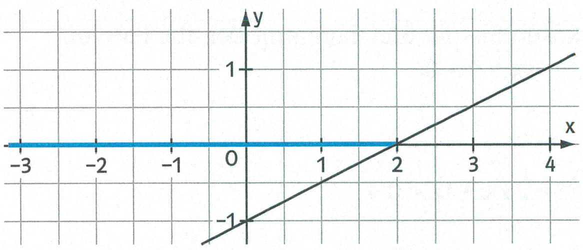


EXKURS – Lineare Ungleichungen

Sind zwei Terme durch ein <, ≦ , > oder ≧-Zeichen miteinander verknüpft, so spricht man von einer **Ungleichung**.

Grafische Lösung

Beispiel: $\frac{1}{2}x - 1 < 0$



Der linke Term wird als lineare Funktion aufgefasst und im Koordinatensystem dargestellt. Alle Zahlen kleiner als 2 sind für diese Ungleichung Lösungen.
Man kann die Lösungen auch geschickt an einer Zahlengeraden darstellen.

Man schreibt für die Lösungsmenge
$L = \{x \mid x < 2\}$.

Rechnerische Lösung

Ungleichungen können rechnerisch mithilfe derselben Äquivalenzumformungen gelöst werden wie Gleichungen, es gilt jedoch eine Ausnahme: Wird auf beiden Seiten der Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert, so muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
5 - 5x &< 20 && \mid -5 \\
-5x &< 15 && \mid :(-5) \\
x &> -3 \\
L = \{x \mid x &> -3\}
\end{aligned}
$$

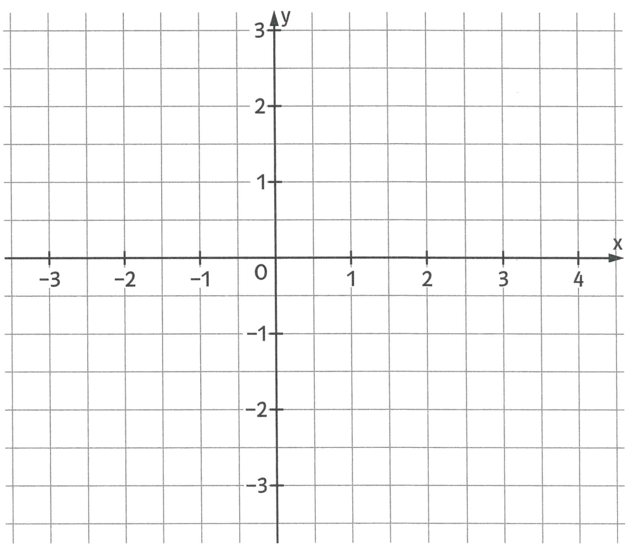
a) Lösen Sie die Ungleichung grafisch und stellen Sie die Lösungen an einer Zahlengeraden dar.

$x - 3 < 0$

____

$\frac{1}{2}x + 1 < 0$

____



b) Lösen Sie die Ungleichung rechnerisch und stellen Sie die Lösungen an einer Zahlengeraden dar.

$x + 4 > 0$

____

$5x + 1 > 3x - 5$

____

$2(x + 1) > 5$

____

4 Rein quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen und lösen Sie die Gleichung. Begründen Sie.

a) $(4x - 1)^2 = (x - 4)^2$

b) $5x^2 + 5 = 0$

c) $12(x^2 - 4) = 3x^2 - 48$

d) $6x - (3x - 4)(3x + 4) = 2(3x + 2)$

EXKURS – Die abc-Formel, eine andere Lösungsformel

Außer der pq-Formel gibt es zur Lösung von quadratischen Gleichungen noch eine zweite Lösungsformel.

Die **abc-Formel** liefert die Lösungen der gemischt quadratischen Gleichung in der Normalform

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Anwendung dieser Formel ist besonders geschickt, wenn man das Rechnen mit Brüchen vermeiden will.

Beispiel: $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Hier kann die abc-Formel direkt angewendet werden. Auf die Division durch den Koeffizienten von x^2 kann man verzichten.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ und } x_2 = -2$$

a) Lösen Sie die Gleichung mit beiden Formeln und vergleichen Sie den Lösungsalgorithmus.

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} = 0$

b) Lösen Sie die Gleichung mit der abc-Formel.

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

$12x^2 - 25x + 12 = 0$

$(x - 3)^2 + 2(x - 1)^2 = 4x + 3$

$3x - 42 = 42(x + 1) - 12x(x + 1)$

5 Gemischt quadratische Gleichungen

Lösen Sie die Gleichung mit der pq-Formel oder der abc-Formel.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $x^2 + 6x = -9$

c) $2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3} = 0$

e) $x - x^2 + 20 = 0$

f) $\frac{2}{3} + 2x + 1{,}5x^2 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$

h) $\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x - 8 = 0$

EXKURS – Untersuchung der Diskriminante

Um durch Rechnung festzustellen, ob eine quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat, untersucht man den Radikanden der Lösungsformel, die **Diskriminante D**.

Bei der pq-Formel ist D:	Bei der abc-Formel ist D:
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	$D = b^2 - 4ac$

2 Lösungen	für $D > 0$
1 Lösung	für $D = 0$
keine Lösung	für $D < 0$

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $5x^2 - 6x - 7 = 0$

c) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

d) $\frac{1}{5}x^2 - x + 2 = 0$

6 Quadratische Gleichungen

Lösen Sie die Gleichung.

a) $(4 - x)^2 = 9 - 4x(x - 1)$

b) $2(x + 3)^2 - 2(x + 3)(x - 3) = (2x + 3)^2 - 37$

c) $14x - (x + 3)^2 = 3(x^2 - 7)$

d) $(4 - 3x)^2 - (3 - 2x)^2 = 3$

e) $4x(x + 2) - 8 = 3(x^2 + 4)$

f) $(2x - 5)^2 - 2(x - 1)(x + 1) = -5$

EXKURS – Sonderfälle quadratischer Gleichungen

Der Satz vom Nullprodukt

Wenn ein Produkt den Wert Null hat, muss mindestens einer der beiden Faktoren den Wert Null haben. Wenn $a \cdot b = 0$ ist, dann ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$ oder beides.

Manche quadratische Gleichungen können Sie vorteilhaft durch Ausklammern und unter Beachtung des Satzes vom Nullprodukt lösen.

Beispiel: $x^2 - 3x = 0$ | x ausklammern
$x(x - 3) = 0$

Es muss entweder $x = 0$ sein oder $x - 3 = 0$.
Also sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ die Lösungen der Gleichung.

Lösen Sie die Gleichung geschickt.

a) $x^2 + 5x = 0$

b) $3x^2 - 4x = x^2 + 5x$

c) $2x - 2x^2 = 5x(x - 3)$

d) $(x + 1)(x + 8) = 2(x - 2)^2$

e) $4(x + 3)^2 = 0$

EXKURS – Linearfaktoren und Nullstellenform

Nullstellenform

Die Darstellung einer quadratischen Gleichung in der Form

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

bezeichnet man als **Produkt von Linearfaktoren** oder **Nullstellenform**.

Aus dieser Darstellung einer quadratischen Gleichung kann man die Lösungen direkt ablesen.

Aufgrund des Satzes vom Nullprodukt sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung.

Beispiel: $(x + 3)(x - 4) = 0$

Hier können die Lösungen der quadratischen Gleichung direkt bestimmt werden.

$$x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 4$$

Mithilfe der Lösungen einer quadratischen Gleichung kann die Gleichung bestimmt werden.

Beispiel:
Die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind

$$x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -5.$$

Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung als Produkt von Linearfaktoren

$$(x - 2)(x + 5) = 0$$

oder $x^2 + 3x - 10 = 0.$

a) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

$(x + 1)(x + 6) = 0$

$(x - 0{,}5)(x + 0{,}5) = 0$

$(2x + 5)(5x - 2) = 0$

$3(4x - 5)(6 + 7x) = 0$

b) Stellen Sie die zu den vorgegebenen Lösungen zugehörige quadratische Gleichung auf. Bringen Sie die Gleichung auf Normalform.

$x_1 = 4$ und $x_2 = -1$

$x_1 = -2$ und $x_2 = -3$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{3}$

7 Bruchgleichungen

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung.

a) $\frac{x + 2}{x + 4} = \frac{x + 9}{2x}$

b) $\frac{4x + 3}{2} + \frac{3{,}5}{4x + 3} = 4$

c) $\frac{9}{x + 1} + 1 = \frac{16}{2x}$

d) $\frac{3x}{x + 4} + \frac{2x}{x - 4} = \frac{4(x^2 - x + 4)}{x^2 - 16}$

e) $\frac{5 - 2x}{x - 3} + \frac{4 - 2x}{3 - x} = 1$

f) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x + 1}{x^2 + 3x}$

8 Lösungen überprüfen

Prüfen Sie, ob die gegebene Zahl Lösung der Gleichung ist.

a) $x = 0$ für $4x - 5 = 12x - (4x + 5)$

b) $x = \frac{1}{3}$ für $3x^2 + 5 = 3(x^2 + 2) - 1$

c) $x = -3$ für $2x^2 - 6x = -3(9 + 2x) - x^2$

d) $x = 5$ für $\frac{4x-3}{x-5} - \frac{2}{x+3} = \frac{5x-8}{x-5}$

9 Sachprobleme rechnerisch lösen

a) Frau Beck fährt alle zwei Monate im Jahr zu ihren Enkelkindern. Der Normalpreis für die Hin- und Rückfahrt beträgt 82,00 €.
Herr Maier fährt dieselbe Strecke viermal im Jahr. Beide denken über den Erwerb einer Bahn-Card nach. Können Sie beratend helfen?

Die Bahn-Card 25 kostet jährlich 57,00 €, sie ermäßigt jeden Fahrpreis im Fernverkehr um 25 %; die Bahn-Card 50 kostet jährlich 230,00 €, sie ermäßigt den Fahrpreis im Fernverkehr um 50 %.

b) Beim Autofahren wird der Weg, den man braucht, um zum Stillstand zu kommen, oft unterschätzt. Vor allem muss die Geschwindigkeit den Straßenverhältnissen angepasst werden.
Für die Berechnung des Bremswegs berücksichtigt man deshalb für die Bremsverzögerung a die unterschiedlichen Wetterbedingungen (siehe Tabelle).
Der Bremsweg s_B lässt sich mit der Formel $s_B = \frac{v^2}{2a}$ berechnen (v in $\frac{m}{s}$ und a in $\frac{m}{s^2}$). Eine Faustformel, bei der **v in $\frac{km}{h}$** eingesetzt wird, lautet: $s_B = \left(\frac{v}{10}\right)^2$. Vergleichen Sie die Bremswege für 20 $\frac{km}{h}$ und 40 $\frac{km}{h}$ für die verschiedenen Bremsverzögerungen und kommentieren Sie die Verwendung der Faustformel.

Bremswege in m		trocken	nass	Neuschnee (WR)	Neuschnee (SR)	Glatteis
20 $\frac{km}{h}$	Formel					
	Faustformel					
40 $\frac{km}{h}$	Formel					
	Faustformel					

Bremsverzögerungen a in $\frac{m}{s^2}$	
Trockene Straße	7,0
Nasse Straße	5,5
Neuschnee (Winterreifen)	2,8
Neuschnee (Sommerreifen)	2,3
Glatteis	1,3

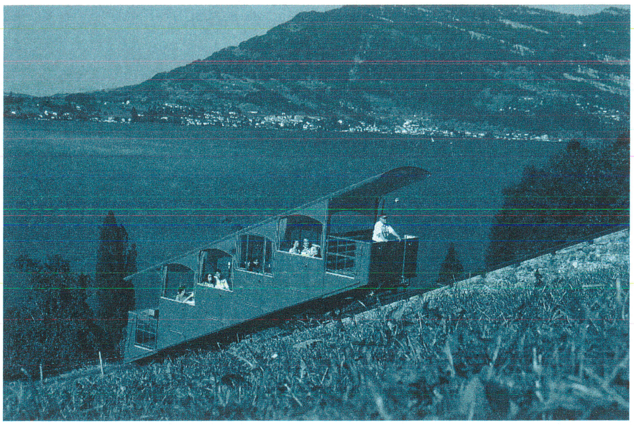
Wie verändern sich die Bremswege bei dreifacher Geschwindigkeit?

Für den Anhalteweg muss noch die Reaktionszeit und der daraus resultierende Reaktionsweg berücksichtigt werden. Der Anhalteweg s_A lässt sich mit der Formel $s_A = v \cdot t_R + \frac{v^2}{2a}$ berechnen (v in $\frac{m}{s}$ und a in $\frac{m}{s^2}$). Man kann mit einer normalen Reaktionszeit t_R von 1,5 s rechnen.
Um wieviel % ist bei Glatteis der Anhalteweg länger als der reine Bremsweg, wenn das Auto 20 $\frac{km}{h}$ fährt?

Aus dem Anhalteweg kann man auf die Geschwindigkeit schließen. Wie schnell fuhr ein Auto, das bei nasser Fahrbahn nach 100 m zum Stehen kam?

3 Lineare Funktionen

Dieses Kapitel ermöglicht Ihnen, alle wichtigen Gesichtspunkte im Umgang mit linearen und quadratischen Funktionen zu wiederholen und intensiv zu üben.



Bevor Sie anfangen zu üben, sollten Sie eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 abgeben (erste Spalte in der unteren Tabelle).

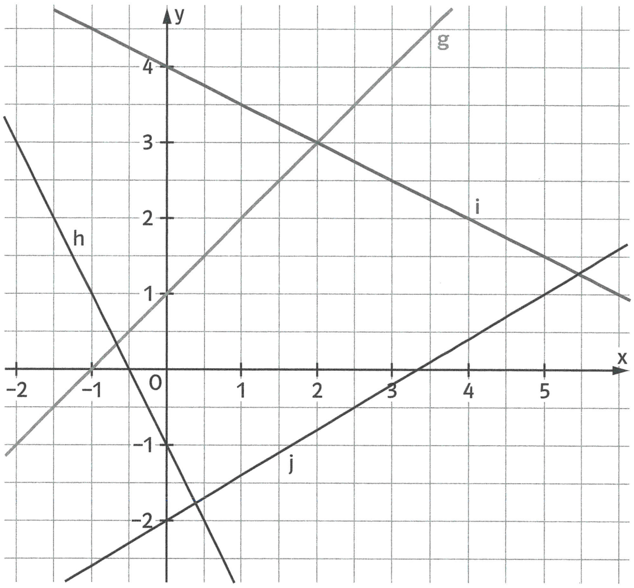
Anschließend können Sie die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennen Sie Ihre Stärken und Schwächen, sodass ein gezieltes und effektives Üben möglich wird.

Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Kapitels
1. Ich kann die Gleichung einer Geraden angeben, die im Koordinatensystem abgebildet ist.			
2. Ich kann zu einer gegebenen Geradengleichung der Form $y = mx + b$ die zugehörige Gerade in ein Koordinatensystem einzeichnen.			
3. Ich kann die Gleichung einer Geraden in der Form $y = mx + b$ bestimmen, wenn die Steigung bzw. der y-Achsenabschnitt und ein Punkt der Geraden gegeben sind.			
4. Ich kann die Gleichung einer Geraden in der Form $y = mx + b$ bestimmen, wenn zwei Punkte der Geraden gegeben sind.			
5. Ich kann den Schnittpunkt von zwei Geraden bestimmen.			
6. Ich kann ein lineares Gleichungssystem grafisch lösen.			
7. Ich kann das Gleichsetzungs-, das Einsetzungs- oder das Additionsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems verwenden.			
8. Ich kann die Kenntnisse über lineare Funktionen und lineare Gleichungssysteme zur Lösung mathematischer Probleme anwenden.			

Mithilfe dieser Testaufgaben können Sie Ihre Selbsteinschätzung von Seite 22 überprüfen. Bearbeiten Sie die Aufgaben. Anschließend können Sie mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten Ihre Lösungen kontrollieren.

1 Bestimmen Sie die Gleichungen der abgebildeten Geraden in der Form y = mx + b.



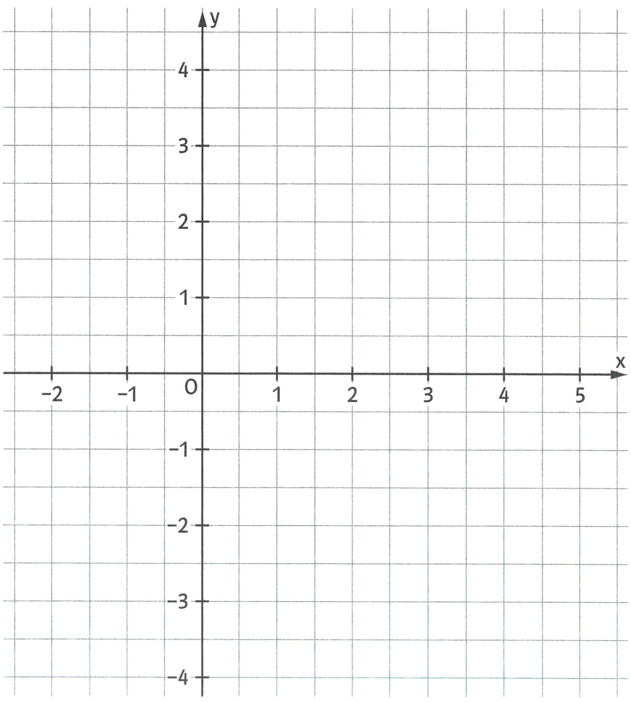
g: ______________ h: ______________

i: ______________ j: ______________

2 Zeichnen Sie die Geraden in das Koordinatensystem.

a) $y = x - 3{,}5$ b) $y = -x + 2{,}5$

c) $y = -\frac{1}{2}x - 0{,}5$ d) $y = \frac{2}{3}x + 1{,}5$



3 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in der Form y = mx + b.

a) Die Gerade mit m = 2 verläuft durch P(3 | 5).

____

b) Die Gerade mit b = −5,5 verläuft durch P(−1 | −4).

____

4 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden.

a) A(3 | 4); B(5 | 6) b) A(3 | −3); B(−4 | 11)

______________ ______________

5 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.

a) Zeichnerisch: g: $y = 3x - 1$ und h: $y = -x + 7$

____

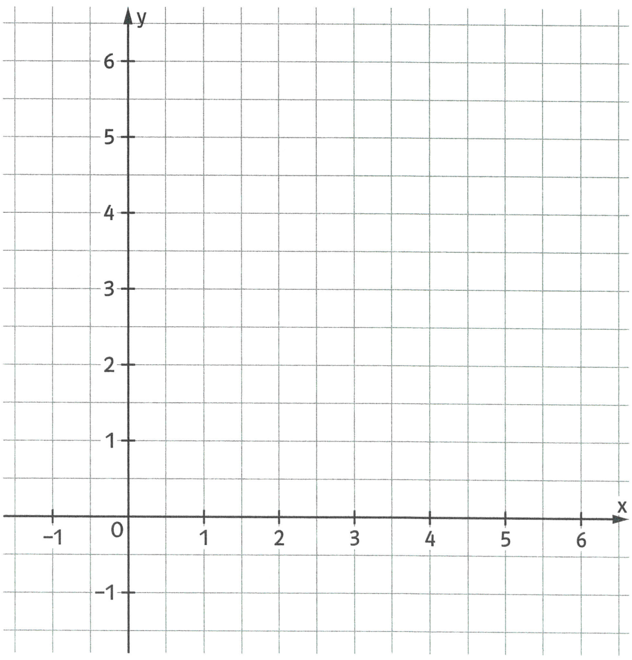
b) Rechnerisch: g: $y = \frac{3}{2}x + 4{,}5$ und h: $y = -\frac{3}{5}x - 6$

____

6 Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems grafisch.

a) $y = x + 1$
$y = -2x + 4$

b) $y = \frac{2}{3}x - 1$
$y = -\frac{1}{2}x + 6$



a) ______________ b) ______________

7 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

a) $x = 2y - 3$
$x = 3y + 4$

b) $x = 3y - 1$
$5x - 7y = 3$

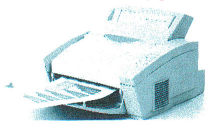
c) $8x - 3y = -8$
$4x + 4y = 18$

d) $\frac{2x+5}{4} - 2 = \frac{6y-1}{3}$
$\frac{3y}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{x}{2}$

8 Frau Schweizer vergleicht zwei Angebote.

Laser Print	
Preis für Drucker	350€
Toner (Kapazität: 6000 Seiten)	60€

Master Copy	
Preis für Drucker	450 €
Toner (Kapazität: 6000 Seiten)	40 €



a) Bestimmen Sie für die Angebote jeweils eine Funktionsgleichung, mit der man die Kosten berechnen kann.

b) Vergleichen Sie die entstehenden Gesamtkosten der beiden Angebote für jeweils 12 000 bedruckte Seiten.

c) Für welchen Drucker soll sich Frau Schweizer entscheiden?

EXKURS – Schreibweise bei Funktionen

Bei vielen Fragestellungen in der Mathematik geht es um den Zusammenhang zwischen zwei Größen. Wenn dabei jedem Wert der einen Größe genau ein Wert der anderen Größe zugeordnet wird, nennt man diesen Zusammenhang eine „Funktion“. Die beiden Größen, die „unabhängige“ bzw. „abhängige Variable“ genannt werden, werden oft mit x und y bezeichnet.

Beispiel: Bei einem Füllvorgang wird jedem Zeitpunkt x eine Füllhöhe y zugeordnet. In dem Wasserbehälter in Fig. 1 ist die Füllhöhe am Anfang 20 cm und sie steigt gleichmäßig um 3 cm pro Sekunde.
Dieser Zusammenhang wird durch die Gleichung $y = 3x + 20$ beschrieben.
Um auszudrücken, dass es sich dabei um eine Funktion handelt, dass also zu jedem Zeitpunkt genau eine Füllhöhe gehört, nennen wir diese Funktion f und schreiben $f(x) = 3x + 20$.
$f(x)$ nennt man den „Funktionswert der Funktion f an der Stelle x“. Der Funktionswert an der Stelle 2 ist also $f(2) = 26$, ebenso ist $f(5) = 35$.
Das Schaubild dieser Funktion ist eine Gerade; man nennt eine solche Funktion „linear“.

Die Zuordnung, die jeder Tagestemperatur die Uhrzeit zuordnet, ist zumeist keine Funktion. So kann beispielsweise 18 °C an mehreren Zeitpunkten des Tages gemessen werden.

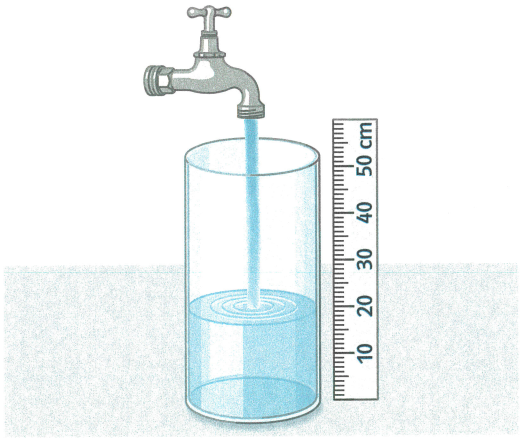
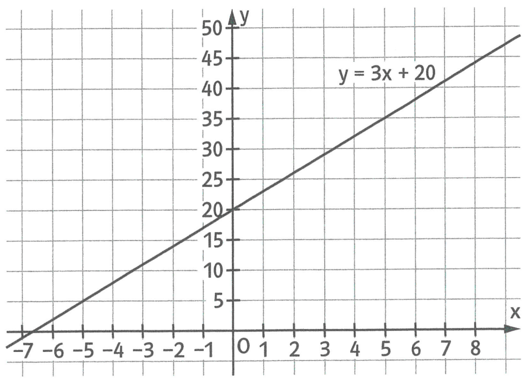


Fig. 1



Sie haben die Testaufgaben gelöst. Mithilfe der folgenden Musterlösungen können Sie Ihre Lösungen kontrollieren. Anschließend sollten Sie nochmals eine Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich der linearen Funktionen vornehmen.

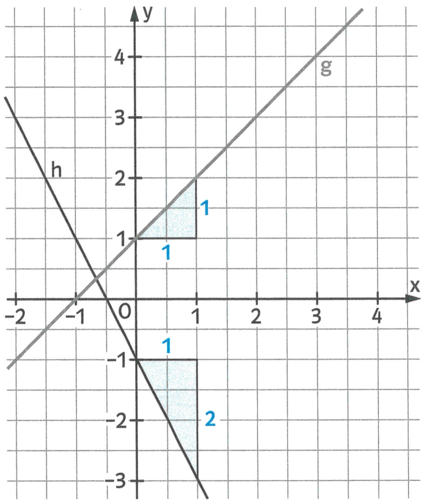
1 Zum Graphen die Geradengleichung bestimmen

Gerade g

Die y-Achse wird bei $y = 1$ geschnitten, somit ist der y-Achsenabschnitt $b = 1$.
Die Steigung ist $m = 1$.
Dies erkennt man am Steigungsdreieck. Geht man eine Einheit nach rechts, muss man ebenfalls eine Einheit nach oben gehen.
Für die Gerade g gilt: $y = x + 1$.

Gerade h

Der y-Achsenabschnitt ist $b = -1$.
Beim eingezeichneten Steigungsdreieck geht man eine Einheit nach rechts und zwei Einheiten nach unten.
Die Steigung ist somit $m = -2$.
Für die Gerade h gilt: $y = -2x - 1$.

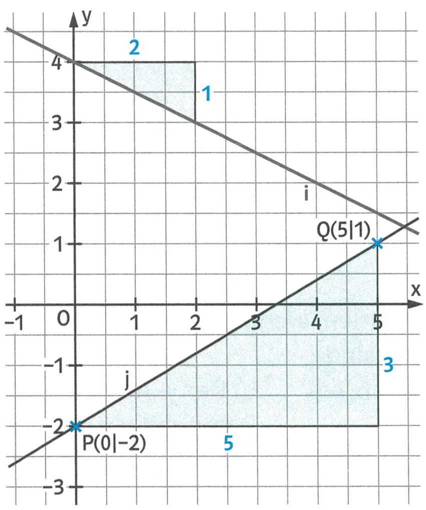


Gerade i

Der y-Achsenabschnitt ist $b = 4$.
Um die Steigung zu bestimmen, ist es günstig, ein Steigungsdreieck zu zeichnen.
Man geht zwei Einheiten nach rechts und eine Einheit nach unten.
Somit ist die Steigung $m = -\frac{1}{2}$.
Für die Gerade i gilt: $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Gerade j

Der y-Achsenabschnitt ist $b = -2$.
Um die Steigung zu bestimmen, sucht man zunächst Punkte der Geraden, die ganzzahlige Koordinaten haben. Neben $P(0|-2)$ ist $Q(5|1)$ ein geeigneter Punkt.
Zum Zeichnen des Steigungsdreiecks geht man von P um 5 Einheiten nach rechts (Nenner)
und 3 Einheiten nach oben (Zähler).
Somit ist die Steigung $m = \frac{3}{5}$.
Für die Gerade j gilt: $y = \frac{3}{5}x - 2$.



Normalform von Geraden:
$y = mx + b$

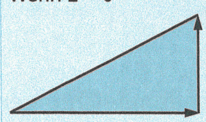
y-Achsenabschnitt b:
Die Gerade schneidet die y-Achse in $P(0|b)$.

Steigung m:
Eine Einheit nach rechts und
- m Einheiten nach oben (wenn $m > 0$)
- −m Einheiten nach unten (wenn $m < 0$)

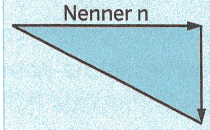
(Siehe auch Anmerkung auf Seite 27)

Steigungsdreieck bei Brüchen:
Wenn die Steigung als Bruch $m = \frac{z}{n}$ dargestellt ist, kann man das Steigungsdreieck so zeichnen:

Wenn $z > 0$



Wenn $z < 0$



2 Geraden zeichnen

a) Zum Zeichnen einer Geraden benötigt man zwei Punkte. Für x = 0 ergibt sich der y-Achsenabschnitt y = −3,5. Die Gerade geht also durch P(0 | −3,5). Wählt man x = 2, ergibt sich y = −1,5. Damit liegt Q(2 | −1,5) ebenfalls auf der Geraden.

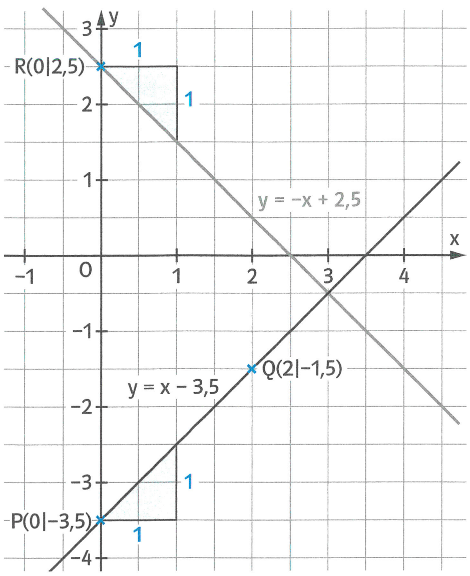
b) Die Gerade hat den y-Achsenabschnitt y = 2,5 und geht damit durch R(0 | 2,5). Die Steigung ist m = −1. Man geht von R aus eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach unten.

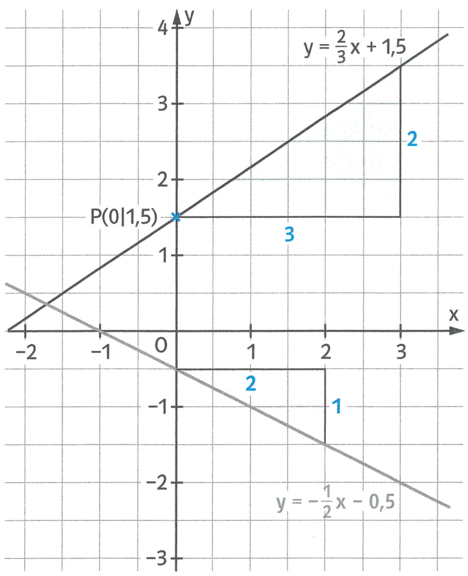
c) Zunächst trägt man den **y-Achsenabschnitt** mit y = −0,5 ins Koordinatensystem ein. Von dort aus zeichnet man ein **Steigungsdreieck** (eine Einheit nach rechts und eine halbe Einheit nach unten oder zwei nach rechts und eine nach unten).

d) Man kann ausgehend von P(0 | 1,5) ein Steigungsdreieck zeichnen. Da die Steigung ein Bruch ist, bietet es sich an, den Nenner (3 Einheiten) nach rechts und den Zähler (2 Einheiten) nach oben zu gehen.

1. Möglichkeit:
Man bestimmt mithilfe der Funktionsgleichung zwei Punkte auf dem Graphen und verbindet diese zu einer Geraden.

2. Möglichkeit:
Man markiert zunächst den y-Achsenabschnitt ein und zeichnet von dort ein Steigungsdreieck.





3 Geradengleichungen bestimmen, wenn ein Punkt und die Steigung oder der y-Achsenabschnitt gegeben sind

a) Die Steigung m = 2 ist gegeben, somit gilt y = 2x + b.
Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzt man die Koordinaten des gegebenen Punktes P(3|5) für x und y in die Gleichung ein.

$5 = 2 \cdot 3 + b$
$5 = 6 + b \quad | -6$
$b = -1$

Die Gerade hat somit die Gleichung:
y = 2x − 1.

b) Der y- Achsenabschnitt ist b = −5,5. Damit gilt y = mx − 5,5.
Um die Steigung zu bestimmen, setzt man die Koordinaten des gegebenen Punktes P(−1 | −4) für x und y in die Gleichung ein.

$-4 = m \cdot (-1) - 5,5 \quad | +5,5$
$1,5 = -m \quad | \cdot(-1)$
$m = -1,5$

Die Gerade hat somit die Gleichung:
y = −1,5x − 5,5.

y-Achsenabschnitt b bestimmen:
m und die Koordinaten eines Punktes in die Normalform y = mx + b einsetzen und nach b auflösen.

Steigung m bestimmen:
b und die Koordinaten eines Punktes in die Normalform y = mx + b einsetzen und nach m auflösen.

4 Geradengleichungen mithilfe von zwei Punkten bestimmen

a) Man kann die Koordinaten der gegebenen Punkte in die Geradengleichung einsetzen. Anschließend löst man das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lll} (1) & 4 = m \cdot 3 + b & \mid -3m \\ (2) & 6 = m \cdot 5 + b & \mid -5m \\ \hline (1) & 4 - 3m = b & \\ (2) & 6 - 5m = b & \end{array}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} 4 - 3m &= 6 - 5m \quad && \mid +5m - 4 \\ 2m &= 2 && \\ m &= 1 && \end{aligned}$$

$m = 1$ setzt man in eine der beiden Gleichungen ein.

$$\begin{aligned} 4 &= 1 \cdot 3 + b \quad && \mid -3 \\ b &= 1 && \end{aligned}$$

Die Gleichung heißt also $y = x + 1$.

b) Die Steigung lässt sich aus den gegeben Punkten auch folgendermaßen berechnen:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{11 - (-3)}{-4 - 3} = \frac{14}{-7} = -2$$

Somit gilt $y = -2x + b$.

Der y-Achsenabschnitt b lässt sich berechnen, indem man die Koordinaten von $A(-4 \mid 11)$ und $m = -2$ einsetzt.

$$\begin{aligned} 11 &= (-4) \cdot (-2) + b && \\ 11 &= 8 + b \quad && \mid -8 \\ b &= 3 && \end{aligned}$$

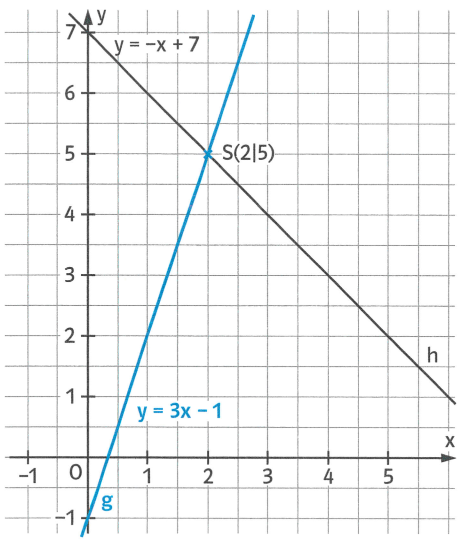
Die Gleichung heißt also $y = -2x + 3$.

Berechnung des y-Achsenabschnitts und der Steigung mithilfe eines linearen Gleichungssystems:
(1) $y_A = m \cdot x_A + b$
(2) $y_B = m \cdot x_B + b$

Berechnung der Steigung mithilfe von zwei Punkten $A(x_A \mid y_A)$ und $B(x_B \mid y_B)$:
$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
oder
$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

5 Schnittpunkt von zwei Geraden bestimmen

a) **Zeichnerische Lösung:**



Der Zeichnung entnimmt man den Schnittpunkt $S(2 \mid 5)$. Eine Probe zeigt, dass diese Lösung richtig ist.
Für die Gerade g gilt: Für $x = 2$ ist $y = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.
Für die Gerade h gilt: Für $x = 2$ ist $y = -2 + 7 = 5$.
Zeichnerische Lösungen sind oft nur Näherungswerte.

b) **Rechnerische Lösung:**

1. Gleichsetzen
Man setzt die Funktionsterme von g und h gleich, um die x-Koordinate des Schnittpunktes zu bestimmen.
$\frac{3}{2}x + 4{,}5 = -\frac{3}{5}x - 6$

2. Berechnung des x-Werts

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}x + 4{,}5 &= -\tfrac{3}{5}x - 6 \quad && \mid \cdot 10 \\ 15x + 45 &= -6x - 60 && \mid +6x - 45 \\ 21x &= -105 && \mid :21 \\ x &= -5 && \end{aligned}$$

3. Berechnung des y-Wertes
Den y-Wert des Schnittpunktes erhält man, indem man den x-Wert in einen der beiden Funktionsterme einsetzt:
$y = \frac{3}{2} \cdot (-5) + 4{,}5$
$y = -3$
Der Schnittpunkt lautet also $S(-5 \mid -3)$.

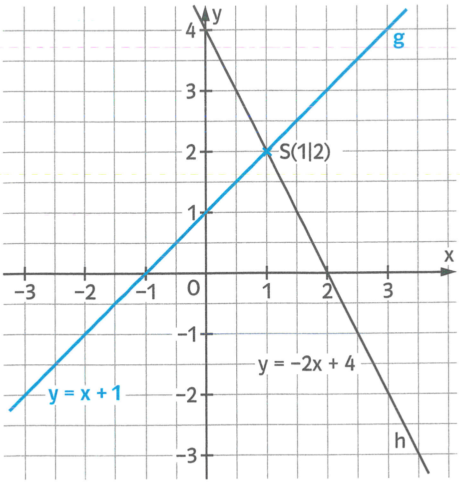
Zur Kontrolle kann man den berechneten x-Wert in den zweiten Funktionsterm einsetzen.

Zeichnerische Lösung:
Man zeichnet beide Graphen und liest den Schnittpunkt ab.
Diese Methode liefert oft nur Näherungsergebnisse.

Rechnerische Lösung:
1. Funktionsterme gleichsetzen.
2. Gleichung lösen, um den x-Wert des Schnittpunktes zu bestimmen.
3. y-Wert mit einem der Funktionsterme durch Einsetzen des x-Wertes berechnen.

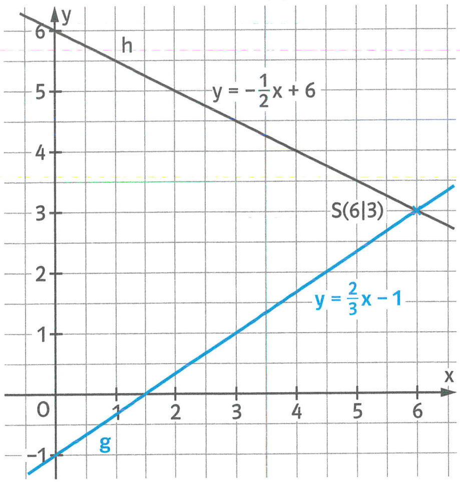
6 Lineare Gleichungssysteme grafisch lösen

a) **Zeichnerische Lösung:**



Der Zeichnung entnimmt man den Schnittpunkt S (1 | 2). Eine Probe zeigt, dass diese Lösung richtig ist.
Für die Gerade g gilt:
Für $x = 1$ ist $y = 1 + 1 = 2$.
Für die Gerade h gilt:
Für $x = 1$ ist $y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$.

b) **Zeichnerische Lösung:**



Die Steigungen der beiden Geraden sind Brüche. Beim Einzeichnen können deshalb eher Ungenauigkeiten auftreten, die sich beim Ablesen auswirken. Der abgelesene Schnittpunkt S (6 | 3) hat die Koordinaten $x = 6$ und $y = 3$.

Zeichnerische Lösung:
Man zeichnet beide Graphen und liest den Schnittpunkt ab.
Diese Methode liefert oft nur Näherungsergebnisse.

7 Lineare Gleichungssysteme rechnerisch lösen

a) **Lösung mit dem Gleichsetzungsverfahren:**
Sind bereits beide Gleichungen nach einer Variable aufgelöst, verwendet man das Gleichsetzungsverfahren.

(1) $x = 2y - 3$
(2) $x = 3y + 4$

(1) = (2): $2y - 3 = 3y + 4 \quad | -2y - 4$
$y = -7$

Der Wert $y = -7$ wird in eine der beiden Gleichungen eingesetzt.
$x = 2 \cdot (-7) - 3$
$x = -17$
Die Lösungen lauten:
$x = -17$
$y = -7$

b) **Lösung mit dem Einsetzungsverfahren:**
Ist eine der beiden Gleichungen bereits nach einer Variable aufgelöst, verwendet man das Einsetzungsverfahren.

(1) $x = 3y - 1$
(2) $5x - 7y = 3$

(1) in (2): $5(3y - 1) - 7y = 3$
$15y - 5 - 7y = 3 \quad | +5$
$8y = 8 \quad | :8$
$y = 1$

Der Wert $y = 1$ wird in eine der beiden Gleichungen eingesetzt.
$x = 3 \cdot 1 - 1 = 2$
Die Lösungen lauten: $x = 2$; $y = 1$.

Gleichsetzungsverfahren:
Beide Gleichungen werden nach einer Variablen aufgelöst. Durch Gleichsetzen der Terme erhält man eine Gleichung mit einer Variablen. Die Lösung dieser Gleichung setzt man in eine der Gleichungen ein und erhält so die Lösung für die zweite Variable.

Einsetzungsverfahren:
Eine der Gleichungen wird nach einer Variablen aufgelöst. Dann setzt man in die andere Gleichung ein.

c) **Lösung mit dem Additionsverfahren:**
Eine oder auch beide Gleichungen multipliziert man mit geeigneten Faktoren, sodass anschließend beim Addieren der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.

$$\begin{array}{lrl} (1) & 8x - 3y = -8 & \\ (2) & 4x + 4y = 18 & | \cdot (-2) \\ \hline (1) & 8x - 3y = -8 & \\ (2') & -8x - 8y = -36 & \\ \hline (1) + (2'): & -11y = -44 & | : (-11) \\ & y = 4 & \end{array}$$

$y = 4$ in (1) eingesetzt ergibt:

$$\begin{array}{rl} 8x - 3 \cdot 4 = -8 & | +12 \\ 8x = 4 & | : 8 \\ x = 0{,}5 & \end{array}$$

Die Lösungen lauten: $x = 0{,}5$; $y = 4$.
Somit gilt für die Lösungsmenge:
$L = \{(0{,}5;\ 4)\}$.

d) **Auswahl eines geeigneten Verfahrens:**
Zunächst wird so umgeformt, dass beide Gleichungen nennerfrei sind. Dann fasst man zusammen und wählt ein geeignetes Verfahren aus.

$$\begin{array}{lrl} (1) & \frac{2x+5}{4} - 2 = \frac{6y-1}{3} & | \cdot 12 \\ (2) & \frac{3y}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{x}{2} & | \cdot 4 \\ \hline (1) & 6x + 15 - 24 = 24y - 4 & | -24y + 9 \\ (2) & 3y + 2 = -2x & | +2x - 2 \\ \hline (1) & 6x - 24y = 5 & \\ (2) & 2x + 3y = -2 & | \cdot 8 \\ \hline (2') & 16x + 24y = -16 & \end{array}$$

Auswahl des Additionsverfahrens:

$$\begin{array}{lrl} (1) + (2'): & 22x = -11 & | : 22 \\ & x = -\frac{1}{2} & \\ & y = -\frac{1}{3} & \end{array}$$

Somit gilt für die Lösungsmenge:
$L = \left\{\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)\right\}$

Additionsverfahren:
Man formt beide Gleichungen so um, dass beim Addieren oder Subtrahieren beider Gleichungen eine Variable wegfällt. So entsteht eine Gleichung mit einer Variablen.

8 Lineare Funktionen zum Lösen von Anwendungssituationen verwenden

a) Der Kaufpreis des Druckers ist fest vorgegeben, er entspricht somit dem y-Achsenabschnitt einer linearen Funktion.
Die Anzahl x der verbrauchten Tonerkartuschen kann unterschiedlich hoch sein. Damit ergeben sich die beiden folgenden Funktionsgleichungen.

Laser Print: $f_1(x) = 60 \cdot x + 350$
Master Copy: $f_2(x) = 40 \cdot x + 450$

b) Zur Berechnung der entstehenden Gesamtkosten für beide Angebote setzt man die Anzahl der benötigten Tonerkartuschen in die Gleichungen ein. Für 12 000 Seiten braucht man 2 Tonerkartuschen.

Kosten Laser Print: $f_1(2) = 60 \cdot 2 + 350$
$f_2(2) = 470$
Kosten Master Copy: $f_1(2) = 40 \cdot 2 + 450$
$f_2(2) = 530$

c) Um entscheiden zu können, welchen Drucker Frau Schweizer anschaffen soll, setzt man die Terme der beiden Funktionsgleichungen gleich.

$$\begin{array}{rl} 60 \cdot x + 350 = 40 \cdot x + 450 & | -40x - 350 \\ 20 \cdot x = 100 & | : 20 \\ x = 5 & \end{array}$$

Bei jeweils 5 verbrauchten Tonerkartuschen sind die entstehenden Kosten gleich. Bei einem höheren Verbrauch sollte sie sich für Master Copy entscheiden.

Funktionsgleichungen in der Anwendungssituation bestimmen:
Die Steigung entspricht der gleichmäßigen Veränderung pro Einheit. Der y-Achsenabschnitt entspricht dem y-Wert, den man für $x = 0$ erhält.

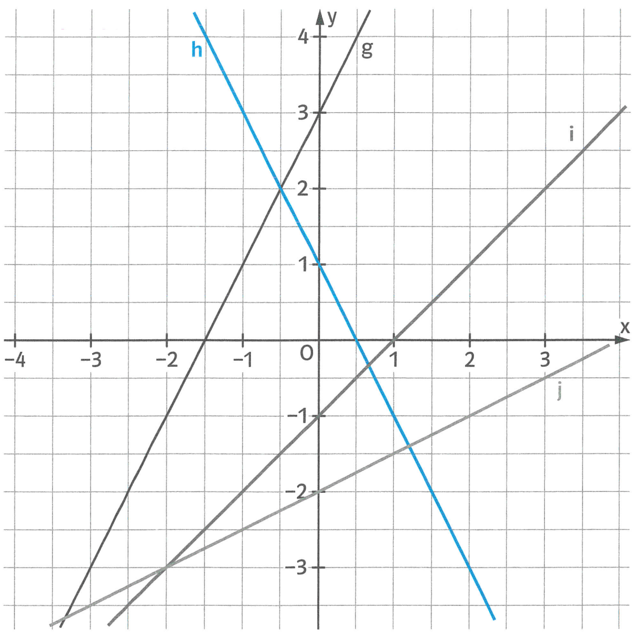
Einheiten beachten:
Wenn man Terme aufstellt oder gleichsetzt, müssen die Einheiten bei allen Werten gleich sein.

Hier finden Sie sowohl Standardaufgaben, die den Testaufgaben ähneln, als auch vertiefende Aufgaben, die erhöhte Anforderungen verlangen. An einzelnen Stellen werden Themen aufbereitet, die über den Standardbereich hinausgehen. Diese Stellen sind als EXKURS gekennzeichnet.

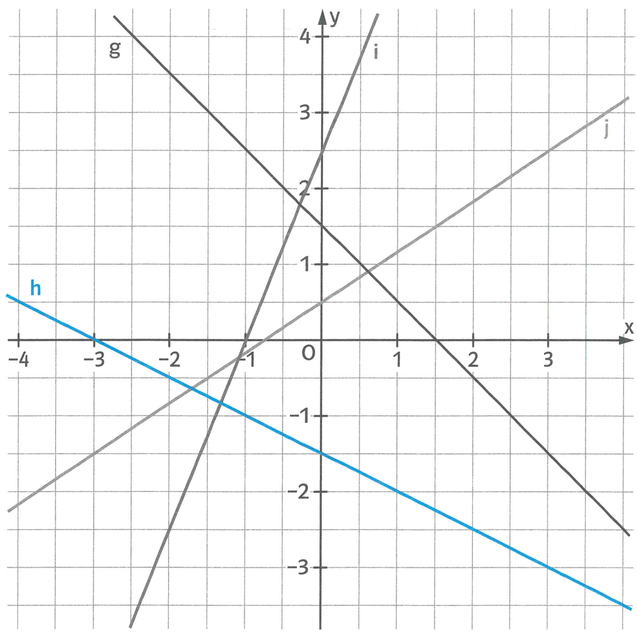
1 Zum Graphen die Geradengleichung bestimmen

Bestimmen Sie die Geradengleichung aus der Zeichnung.

a)



b)



a) g) ______ h) ______

i) ______ j) ______

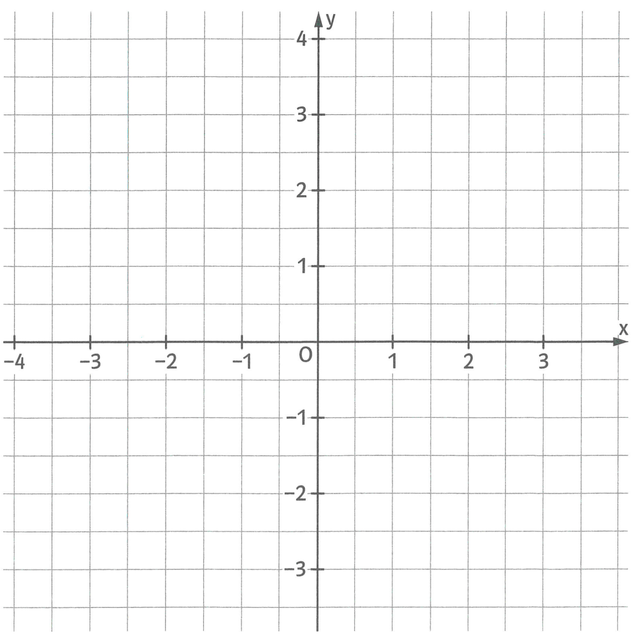
b) g) ______ h) ______

i) ______ j) ______

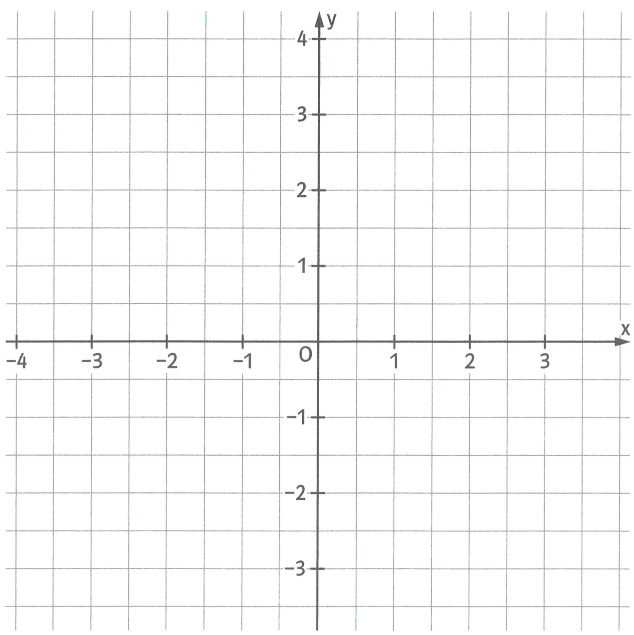
2 Geraden zeichnen

Zeichnen Sie die Geraden in das Koordinatensystem.

a) g: $y = 2x - 2$ h: $y = -x - 0{,}5$



b) g: $y = \frac{2}{3}x - 1{,}5$ h: $y = -\frac{5}{3}x + 1{,}5$



3 Geradengleichungen bestimmen, wenn ein Punkt und die Steigung gegeben sind

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in der Form $y = mx + b$.

a) Die Gerade geht durch $P(2|1)$ mit $m = 1$.

b) Die Gerade geht durch $P(-2|3)$ mit $m = \frac{3}{4}$.

c) Die Gerade geht durch $P(2{,}5|-3{,}5)$ mit $m = 1{,}5$.

d) Die Gerade geht durch $P(-0{,}5|-1{,}5)$ mit $m = -\frac{3}{5}$.

a) ______ b) ______ c) ______ d) ______

4 Geradengleichungen bestimmen, wenn zwei Punkte gegeben sind

Die Gerade geht durch die Punkte A und B. Bestimmen Sie ihre Gleichung in der Form $y = mx + b$.

a) $A(1|1)$; $B(6|11)$ b) $A(2|-10)$; $B(-5|11)$ c) $A(-3|-4{,}5)$; $B(4|-1)$ d) $A(7|-10)$; $B(-14|5)$

a) ______ b) ______ c) ______ d) ______

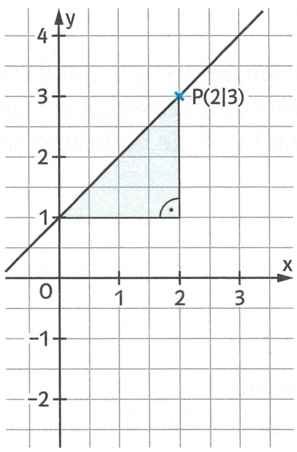
e) $A(-1|5)$; $B(0|8)$ f) $A(6|0)$; $B(-3|-3)$ g) $A(4|-6)$; $B(-2|-1{,}5)$ h) $A(6|2{,}5)$; $B(-3|-3{,}5)$

e) ______ f) ______ g) ______ h) ______

EXKURS – Punkt-Steigungs-Form und Zwei-Punkte-Form

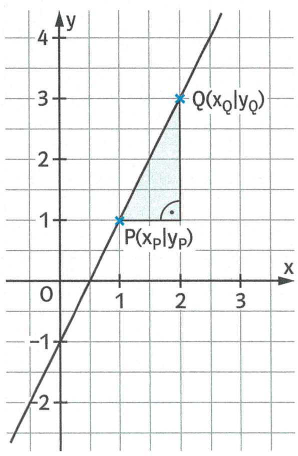
Punkt-Steigungs-Form
Kennt man von einer Geraden die Steigung m und die Koordinaten eines Punktes $P(x_P|y_P)$, kann die Gleichung mit $y = m \cdot (x - x_P) + y_P$ bestimmt werden.

Beispiel:
$m = 1$ und $P(2|3)$
$y = m \cdot (x - x_P) + y_P$
$y = 1 \cdot (x - 2) + 3$
$y = x + 1$



Zwei-Punkte-Form
Sind von einer Geraden die Koordinaten zweier Punkte P und Q bekannt, lässt sich die Gleichung mit $y = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \cdot (x - x_P) + y_P$ bestimmen.

Beispiel:
$P(1|1)$; $Q(2|3)$
$y = \frac{1-3}{1-2} \cdot (x - 1) + 1$
$y = 2 \cdot x - 2 + 1$
$y = 2x - 1$



a) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden mit der Punkt-Steigungs-Form.
- $m = 3$ und $P(4|2)$

______
- $m = -2$ und $P(-2|-5)$

______
- Die Gerade bildet mit der x-Achse einen Winkel von 45° und geht durch $P(-3{,}5|-5{,}5)$.

______

b) Von einer Geraden sind die Koordinaten zweier Punkte bekannt. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden.
- $P(4|11)$ und $Q(-1|1)$

______

______
- $V(2|-3{,}5)$ und $W(-4|1)$

______

______

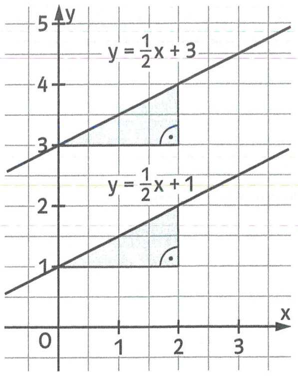
c) Prüfen Sie nach, ob alle Punkte auf einer Geraden liegen.
- $P(-4|-7)$; $Q(1|-4{,}5)$ und $R(5|-2{,}5)$

______
- $R(-5|4{,}5)$; $S(2{,}5|0)$ und $T(4{,}5|1{,}5)$

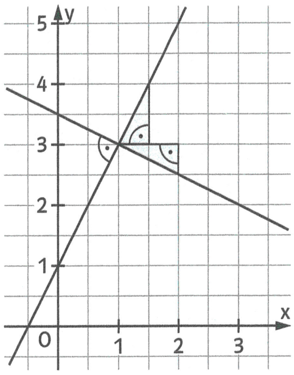
______

EXKURS – Besondere Lage von Geraden zueinander

Parallele Geraden
Zwei Geraden g und h verlaufen zueinander parallel, wenn die beiden Steigungen gleich sind:
$m_g = m_h$.



Zueinander senkrechte Geraden
Zwei Geraden g und h mit den Steigungen m_g und m_h sind genau dann zueinander senkrecht, wenn gilt:
$m_g \cdot m_h = -1$
bzw. $m_g = -\frac{1}{m_h}$.



a) Die Gerade h verläuft zur Geraden g parallel. Geben Sie mögliche Gleichungen von h an.
g: $y = 3x + 2$

h: ______________________

g: $y = -\frac{1}{2}x - 1{,}5$

h: ______________________

b) Die Gerade h steht zur Geraden g senkrecht. Geben Sie mögliche Gleichungen von h an.
g: $y = 2x - 3$

h: ______________________

g: $y = -\frac{1}{4}x + 2$

h: ______________________

c) Die Gerade g verläuft durch den Punkt $P(3\,|\,-4)$ und steht senkrecht zur Geraden h mit $y = -2x - 3$. Wie heißt die Gleichung von g?

g: ______________________

5 Schnittpunkte von Geraden bestimmen

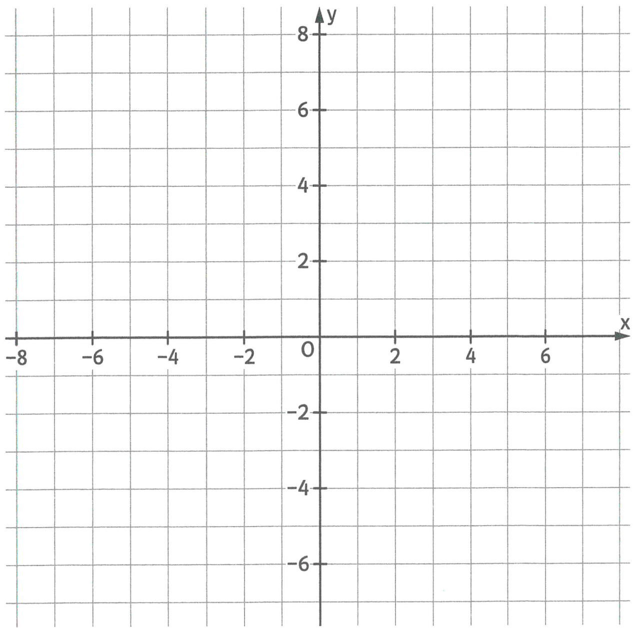
Bestimmen Sie zeichnerisch den Schnittpunkt der beiden Geraden.

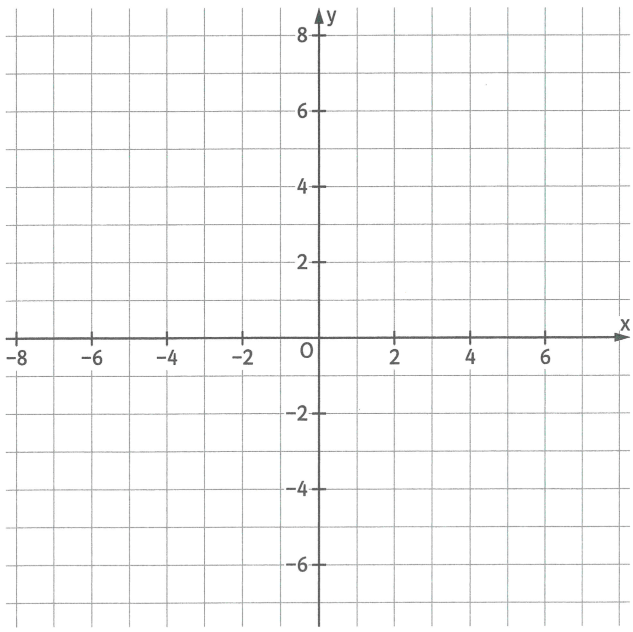
a) $g_1: y = 2x - 1$
$h_1: y = -x - 4$

b) $g_2: y = x - 2$
$h_2: y = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$

c) $g_3: y = 2x - 5$
$h_3: y = -x + 1$

d) $g_4: y = \frac{4}{3}x + 3$
$h_4: y = -\frac{2}{3}x - 3$





S_1(____|____) S_2(____|____) S_3(____|____) S_4(____|____)

Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der beiden Geraden.

e) $g_1: y = x - 3$ $\qquad$ $h_1: y = -x + 7$

Schnittpunkt S_1(____ | ____)

f) $g_2: y = 2x - 1{,}5$ $\qquad$ $h_2: y = -3x - 4$

Schnittpunkt S_2(____ | ____)

g) $g_3: y = \frac{1}{2}x - 1$ $\qquad$ $h_3: y = \frac{1}{4}x + 3$

Schnittpunkt S_3(____ | ____)

h) $g_4: y = 2x + 7$ $\qquad$ $h_4: y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

Schnittpunkt S_4(____ | ____)

6 Zeichnerische Lösung von linearen Gleichungssystemen

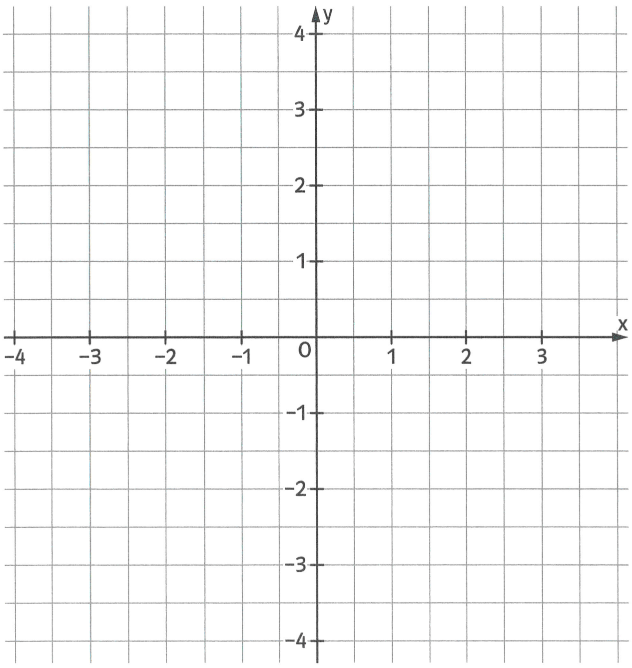
Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems grafisch. Je genauer Sie zeichnen, umso exakter gelingt die Lösungsangabe.

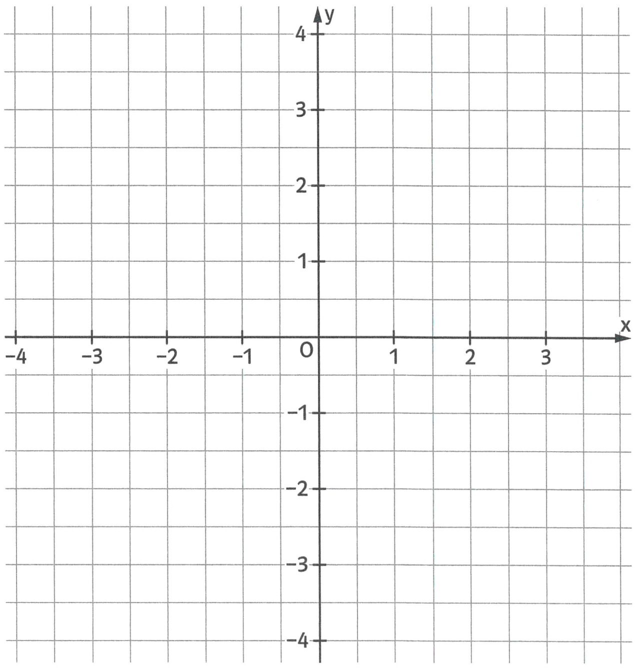
a) $y = x + 3$
$y = -x + 1$

b) $y = 2x + 2$
$y = -\frac{1}{4}x - 3$

c) $y = -2x - 2$
$y = -\frac{1}{2}x + 1$

d) $y = \frac{2}{3}x - 4$
$y = -\frac{4}{3}x + 2$





a) Schnittpunkt S(____ | ____)

Somit gilt: x = ____; y = ____

b) Schnittpunkt S(____ | ____)

Somit gilt: x = ____; y = ____

c) Schnittpunkt S(____ | ____)

Somit gilt: x = ____; y = ____

d) Schnittpunkt S(____ | ____)

Somit gilt: x = ____; y = ____

7 Rechnerische Lösung von linearen Gleichungssystemen

Lösen Sie mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) $x = 2y - 3$
$x = 3y + 4$

$x =$ ______; $y =$ ______

b) $y = 5x - 3$
$y = 9x + 5$

$x =$ ______; $y =$ ______

c) $7x = 12 - y$
$7x + 8 = 3y$

$x =$ ______; $y =$ ______

d) $3x = -4 - 5y$
$6x = 2y + 16$

$x =$ ______; $y =$ ______

Hier ist das Einsetzungsverfahren vorteilhaft.

e) $5x + y = 7$
$y = -2x + 4$

$x =$ ______; $y =$ ______

f) $2x + y = 11$
$y = 19 - 4x$

$x =$ ______; $y =$ ______

g) $2x + 3y = -5$
$2x = y - 1$

$x =$ ______; $y =$ ______

h) $2x - 3y = 11$
$-3y = 7 - 4x$

$x =$ ______; $y =$ ______

Lösen Sie mit dem Additionsverfahren.

i) $2x - 7y = 21$
$3x - 2y = 23$

$x =$ ______; $y =$ ______

j) $5x + 2y = 12$
$8x - 6y = 10$

$x =$ ______; $y =$ ______

k) $4x = 2(1 - 2y)$
$5y = 2(3x - 7)$

$x =$ ______; $y =$ ______

l) $3(8 - 3x) - y = 49 + x$
$38 - x = 2(5 - 3y)$

$x =$ ______; $y =$ ______

Lösen Sie mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

m) $4x + 5y = 6$
$3x - y = -5$

$x =$ ______; $y =$ ______

n) $5y - 45 = 6y - 4x$
$-x = 8 - 3y$

$x =$ ______; $y =$ ______

o) $9(x - 2) - 10(1 - y) = -11$
$6(2x - 1) - 25y = 55$

$x =$ ______; $y =$ ______

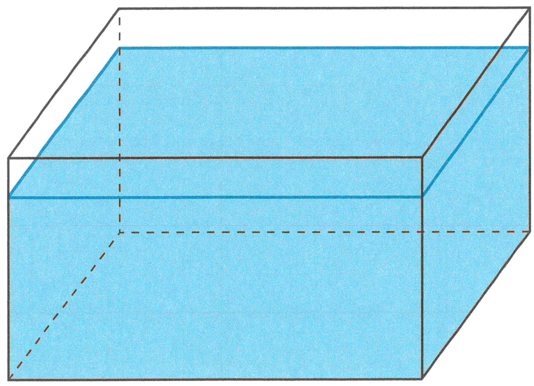
p) $\frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{3}y$
$\frac{4}{3}y - \frac{1}{4}x = 10$

$x =$ ______; $y =$ ______

8 Anwendungssituationen mithilfe von linearen Funktionen lösen

a) **Wasserbehälter**

Zwei quaderförmige Behälter mit gleicher Grundfläche werden mit konstantem, aber unterschiedlich starkem Wasserzufluss gefüllt. Beide Behälter sind 120 cm hoch.
Im Behälter A, der zu Beginn leer ist, beträgt die Höhe des Wasserstandes nach 4 Stunden 48 cm. Im Behälter B beträgt der Wasserstand zu Beginn der Füllung bereits 12 cm.
Nach 2 Stunden ist die Wasserhöhe im Behälter B auf 32 cm angewachsen. Bestimmen Sie für beide Behälter eine Funktionsgleichung, die die Wasserhöhe nach t Stunden beschreibt.



Behälter A: ______________________

Behälter B: ______________________

Nach welcher Zeit ist die Wasserhöhe in beiden Behältern gleich?

____

____

Welcher der beiden Behälter läuft zuerst über? Wie hoch steht das Wasser zu diesem Zeitpunkt im anderen Behälter?

____

____

b) **Stromgebühren**

Familie Bauer prüft die Angebote des örtlichen Energieversorgers.

In den Vorjahren verbrauchte Familie Bauer durchschnittlich 4000 kWh Strom.

Für welches Angebot soll sie sich entscheiden?

Modell Basistarif	
Grundpreis	95,00 €/Jahr
Verbrauchspreis	19,7 ct/kWh

Modell Partnerstrom	
Grundpreis	4,00 €/Monat
Verbrauchspreis	20,5 ct/kWh

Bei welchem durchschnittlichen jährlichen Stromverbrauch würden Sie Familie Bauer raten, einen Tarifwechsel vorzunehmen?

c) **Abfallgebühren**

Die Abfallgebühr setzt sich zusammen aus einer Gebühr nach der Anzahl der im Haushalt gemeldeten Personen (personenbezogene Jahresgebühr) und aus einer Gebühr nach der Anzahl der Behälterleerungen (Leerungsgebühr).

Die vierköpfige Familie Weiß hat sowohl eine 240 l Restmülltonne als auch eine 240 l Biotonne.

Folgende Leerungen fielen an:

Restmülltonne:	20 Leerungen
Biotonne:	18 Leerungen

Berechnen Sie die Gesamtgebühren, die Familie Weiß für das Jahr zu bezahlen hat.

Jahresgebühr

Anzahl der Personen	Jahresgebühr
1 Person	47,90 €
2 Personen	62,90 €
3 Personen	79,90 €
4 Personen	95,90 €
5 oder mehr Personen	109,90 €

Leerungsgebühr

Art der Tonne	Leerungsgebühr
120 ℓ Restmülltonne	3,50 €
240 ℓ Restmülltonne	6,60 €
120 ℓ Biotonne	2,50 €
240 ℓ Biotonne	4,40 €

Frau Braun lebt alleine. Ihre Jahresrechnung beträgt 113,90 €. Sie hat sowohl für den Restmüll als auch für den Biomüll jeweils die kleinste Tonne. Beide Tonnen lässt sie nur im Vierwochenrhythmus leeren.
Wie häufig wurden sowohl die Bio- als auch die Restmülltonne geleert?

4 Quadratische Funktionen

Dieses Kapitel ermöglicht Ihnen, alle wichtigen Aspekte im Umgang mit quadratischen Funktionen zu wiederholen und intensiv zu üben.

Bevor Sie anfangen zu üben, sollten Sie eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 abgeben (erste Spalte in der unteren Tabelle).

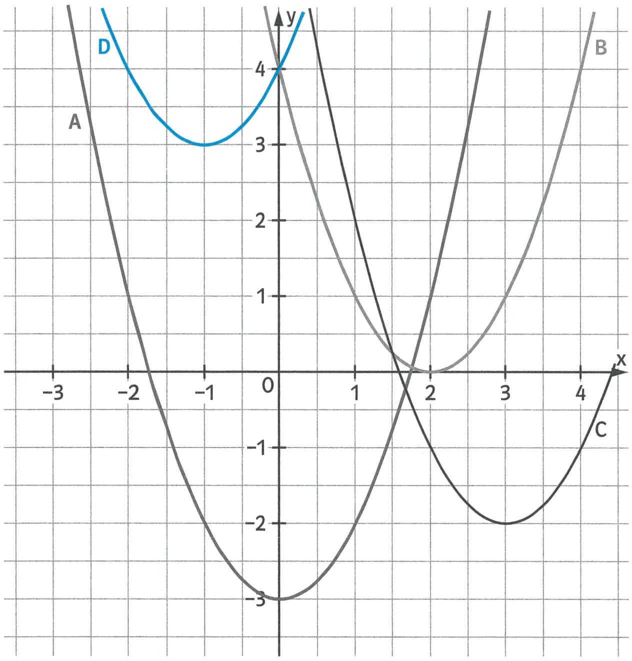
Anschließend können Sie die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennen Sie Ihre Stärken und Schwächen und können nun gezielt üben.

Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Kapitels
1. Ich kann zu vorgegebenen Schaubildern von verschobenen Normalparabeln die Funktionsgleichungen bestimmen.			
2. Ich kann den Graphen einer quadratischen Funktion, die in der Scheitelform gegeben ist, zeichnen.			
3. Ich kann die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in die Scheitelform umformen und den zugehörigen Graphen zeichnen.			
4. Ich kann mithilfe einer Wertetabelle den Graphen einer quadratischen Funktion der Form $y = ax^2 + c$ zeichnen und dem vorgegebenen Graphen einer Gleichung zuordnen.			
5. Ich kann die Gleichung einer verschobenen Normalparabel aus den Koordinaten zweier Punkte bestimmen.			
6. Ich kann die Nullstellen einer quadratischen Funktion bestimmen. Ich kann die Schnittpunkte einer Parabel mit den Koordinatenachsen berechnen.			
7. Ich kann die Schnittpunkte einer Geraden und einer Parabel berechnen.			
8. Ich kann die Schnittpunkte von zwei Parabeln berechnen.			

Die Aufgaben beziehen sich auf die Selbsteinschätzung. Bearbeiten Sie die Aufgaben und kontrollieren Sie dann Ihre Lösung mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten.

1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel in Scheitelform.

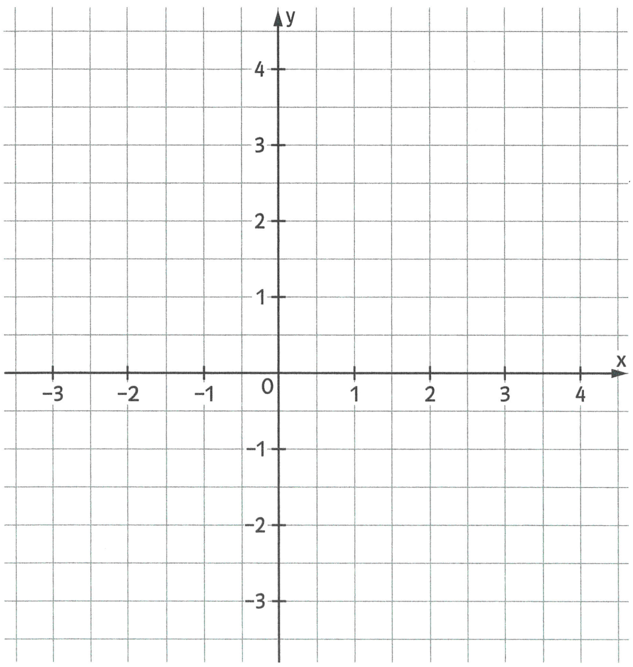


A: y = ______________ B: y = ______________

C: y = ______________ D: y = ______________

2 Zeichnen Sie die Graphen der quadratischen Funktionen in das Koordinatensystem.

A: $y = x^2 + 2$ B: $y = (x + 2)^2$
C: $y = (x - 1)^2 - 3$ D: $y = (x + 3)^2 + 1$



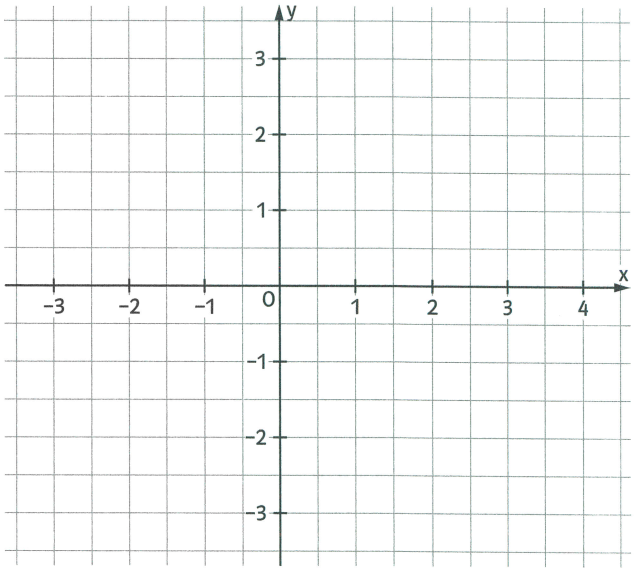
3 Formen Sie die Funktionsgleichung um in Scheitelform und zeichnen Sie den Graphen der Funktionen.

A: $y = x^2 + 2x - 2$ B: $y = x^2 - 6x + 8$

y = ______________ y = ______________

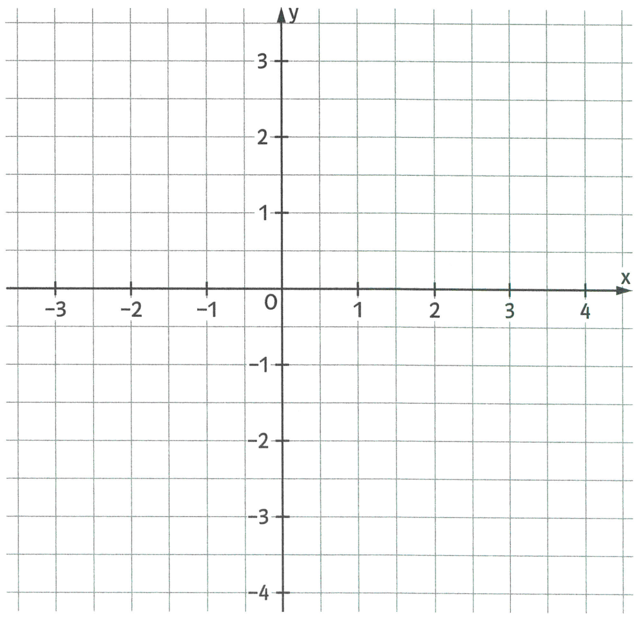
C: $y = x^2 + 4x + 6$ D: $y = x^2 - 2x$

y = ______________ y = ______________



4 a) Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

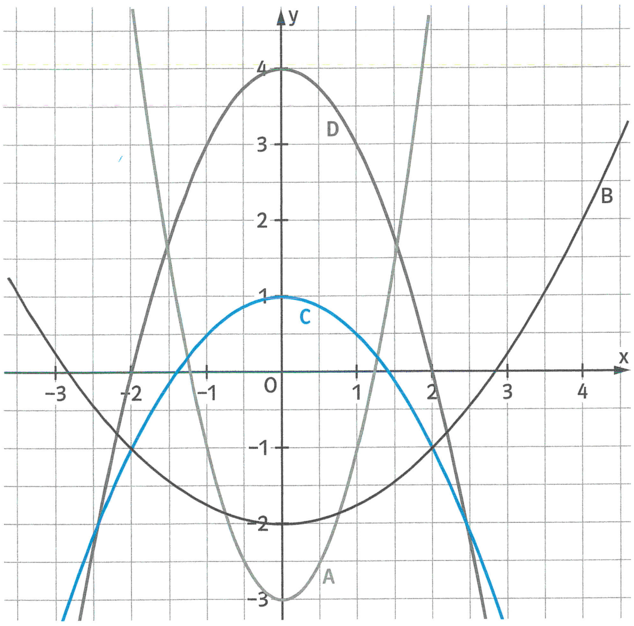
A: $y = -x^2 - 1$ B: $y = 3x^2 - 4$
C: $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ D: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$



b) Ordnen Sie den Schaubildern die entsprechenden Funktionsgleichungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

$y = -x^2 + 4$ $\qquad$ $y = 2x^2 - 3$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ $\qquad$ $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$



A: ____________________

weil ____________________

____

____

B: ____________________

weil ____________________

____

____

C: ____________________

weil ____________________

____

____

D: ____________________

weil ____________________

____

____

5 a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel in der Form $y = x^2 + px + q$, die durch die Punkte $A(2|22)$ und $B(-1|7)$ verläuft.

____

____

____

p = ________ q = ________ y = ________

b) Der Punkt $P(2|-3)$ liegt auf der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + px - 3$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

____

____

____

p = ________ y = ________

6 Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 6x + 5$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen.

x_1 = ________ x_2 = ________

____

____

7 Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 6x + 7$ und die Gerade $y = -x + 1$ schneiden sich in zwei Punkten P und Q.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Schnittpunkte.

P(____|____) ____________________

Q(____|____) ____________________

8 Die beiden Parabeln mit den Gleichungen $y = x^2 - 4x - 1$ und $y = -x^2 + 5$ schneiden sich in den Punkten A und B.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Parabeln.

A(____|____) ____________________

B(____|____) ____________________

Kontrollieren Sie mithilfe der folgenden Musterlösungen Ihre Lösungen der Testaufgaben. Führen Sie dann eine erneute Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich quadratischer Funktionen durch.

1 Funktionsgleichungen zu vorgegebenen Graphen bestimmen

Alle vier Parabeln sind nach oben geöffnete verschobene Normalparabeln.
Parabel A hat ihren Scheitel auf der y-Achse bei S(0 | −3).
Sie hat die Gleichung $y = x^2 - 3$.

Parabel B hat ihren Scheitel auf der x-Achse bei S(2 | 0).
Sie hat die Gleichung $y = (x - 2)^2$.

Die Parabeln C und D sind sowohl in x- als auch in y-Richtung verschobene Normalparabeln.
Durch Einsetzen der Scheitelkoordinaten in die Scheitelform ergibt sich
für Parabel C: S(3 | −2): $y = (x - 3)^2 - 2$

für Parabel D: S(−1 | 3): $y = (x + 1)^2 + 3$

$y = x^2 + c$:
Der Graph dieser Funktion ist eine auf der y-Achse verschobene Normalparabel.

$y = (x - d)^2$:
Der Graph dieser Funktion ist eine auf der x-Achse verschobene Normalparabel.

Scheitelform der Parabelgleichung:
Eine verschobene, nach oben geöffnete Normalparabel mit dem **Scheitel S (d | c)** hat die Gleichung **$y = (x - d)^2 + c$.**

2 Schaubilder von verschobenen Normalparabeln zeichnen

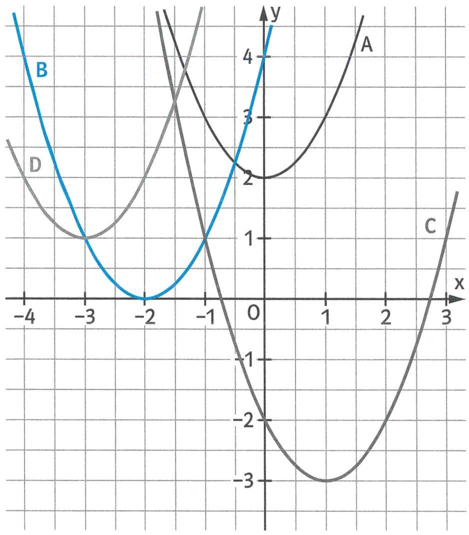
Aus der Scheitelform lässt sich der Scheitel ablesen, sodass man die Parabelschablone dort anlegen kann.

Parabel A hat den Scheitel S (0 | 2).

Parabel B hat den Scheitel S (−2 | 0).

Parabel C hat den Scheitel S (1 | −3).

Parabel D hat den Scheitel S (−3 | 1).



3 Funktionsgleichungen in Scheitelform umformen und zeichnen

Wenn man die quadratische Funktion in Scheitelform darstellt, kann man den Graphen ganz leicht mit der Parabelschablone zeichnen.

Parabel A:

$y = x^2 + 2x - 2$ | $x^2 + 2x$ wird zum Binom ergänzt

$y = x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2$

$y = (x + 1)^2 - 3$

S(−1 | −3)

Parabel B:

$y = x^2 - 6x + 8$ | $x^2 - 6x$ wird zum Binom ergänzt

$y = x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 8$

$y = (x - 3)^2 - 1$

S(3 | −1)

Quadratische Ergänzung:
Mithilfe der quadratischen Ergänzung lässt sich eine Funktionsgleichung
$y = x^2 + px + q$
in die Scheitelform
$y = (x - d)^2 + c$
umformen.

Parabel C:

$y = x^2 + 4x + 6$

$y = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 6$

$y = (x + 2)^2 + 2$

$S(-2\,|\,2)$

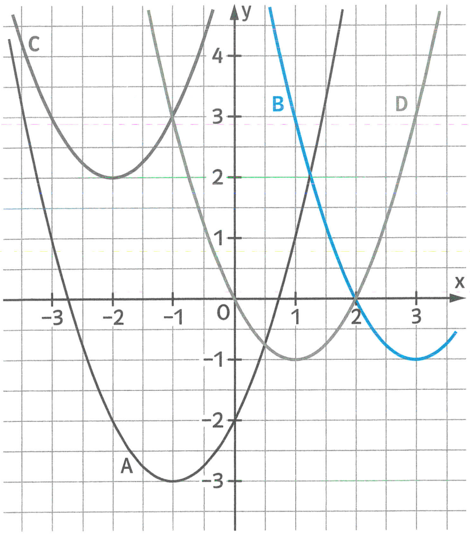
Parabel D:

$y = x^2 - 2x$

$y = x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$y = (x - 1)^2 - 1$

$S(1\,|\,-1)$



4 Zeichnen von Graphen mithilfe einer Wertetabelle

a) Graphen von Funktionen der Form $y = ax^2 + c$ sind keine Normalparabeln und lassen sich deshalb nicht mit der Schablone zeichnen. Eine Wertetabelle hilft weiter.

Parabel A:

$y = -x^2 - 1$

x	−2	−1	0	1	2
y	−5	−2	1	−2	−5

Parabel B:

$y = 3x^2 - 4$

x	−1	−0,5	0	0,5	1
y	−1	−3,25	−4	−3,25	−1

Parabel C:

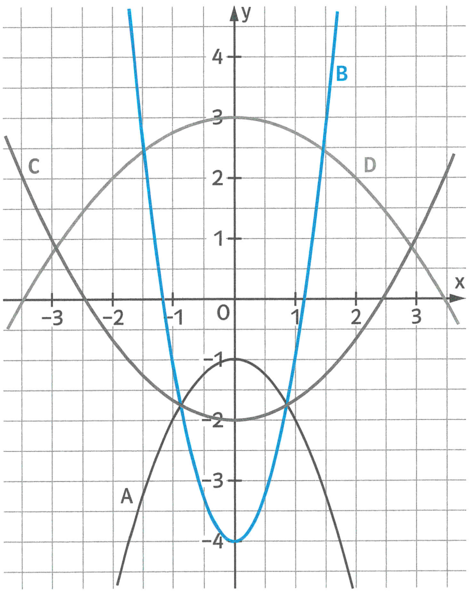
$y = \frac{1}{3}x^2 - 2$

x	−3	−2	−1	0	−1	−2	−3
y	1	−0,7	−1,7	−2	−1,7	−0,7	1

Parabel D:

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	0,75	2,0	2,75	3	2,75	2,0	0,75



Quadratische Funktionen der Form $y = ax^2 + c$:
Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel, deren Scheitel auf der y-Achse liegt $S(0\,|\,c)$. Der Streckfaktor a gibt an, ob die Parabel breiter oder schmaler als die Normalparabel ist.
Ist $a < 0$, ist die Parabel nach unten geöffnet.

Wertetabellen:
Je mehr Punkte man berechnet, desto genauer wird der Graph.
Das Beachten von Symmetrieeigenschaften der Funktion erspart Arbeit.

b) Die Schaubilder werden so zugeordnet:
$y = -x^2 + 4$ gehört zu D, weil der Scheitel bei $S(0\,|\,4)$ liegt.
Es ist eine nach unten geöffnete verschobene Normalparabel.
$y = 2x^2 - 3$ gehört zu A, weil der Scheitel bei $S(0\,|\,-3)$ liegt.
Es ist eine nach oben geöffnete schmale Parabel.
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ gehört zu C, weil der Scheitel bei $S(0\,|\,1)$ liegt.
Es ist eine nach unten geöffnete breite Parabel.
$y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ gehört zu B, weil der Scheitel bei $S(0\,|\,-2)$ liegt.
Es ist eine nach oben geöffnete breite Parabel.

Zuordnungskriterien:
- Scheitel
- Öffnung nach oben oder unten
- Form der Normalparabel, schmal oder breit

5 Parabelgleichung aus zwei Punkten bestimmen

a) Die Punkte A(2 | 22) und B(−1 | 7) liegen auf einer Parabel. Die Koordinaten der Punkte werden in die Gleichung $y = x^2 + px + q$ eingesetzt:

(1) A(2 | 22): $22 = 2^2 + 2p + q$
(2) B(−1 | 7): $7 = (-1)^2 - p + q$

(1) − (2) $15 = 3 + 3p$ | − 3
$12 = 3p$ | : 3
$p = 4$

p = 4 eingesetzt in (1):
$22 = 4 + 8 + q$ | − 12
$q = 10$

Die Parabel hat die Gleichung $y = x^2 + 4x + 10$.

Parabelgleichung aus zwei Punkten:
Einsetzen der Koordinaten in die allgemeine Parabelgleichung ergibt ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, aus dem sich p und q bestimmen lassen.

Parabelgleichung aus einem Punkt und einer unvollständigen Gleichung bestimmen

b) P(2 | −3) liegt auf der Parabel $y = x^2 + px - 3$.
Die Koordinaten des Punktes werden in die Gleichung eingesetzt.

P(2 | −3): $-3 = 2^2 + 2p - 3$ | − 1
$-4 = 2p$ | : 2
$p = -2$

Die Parabel hat die Gleichung $y = x^2 - 2x - 3$.

Punktprobe:
Die Koordinaten eines Punktes werden in die Funktionsgleichung eingesetzt. Es ergibt sich eine Gleichung für die gesuchte Formvariable.

6 Nullstellen einer quadratischen Funktion bestimmen

Da die x-Achse die Gleichung $y = 0$ hat, kann man in der Parabelgleichung $y = x^2 - 6x + 5$ für y den Wert null einsetzen. So ergibt sich eine gemischt quadratische Gleichung, die sich mit der pq-Formel lösen lässt.

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$$
$$x_{1,2} = +3 \pm 2$$
$$x_1 = 5; \; x_2 = 1$$

$x_1 = 5$ und $x_2 = 1$ sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen einer Funktion:
Die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Schaubilds einer Funktion mit der x-Achse bezeichnet man als Nullstellen der Funktion.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen berechnen

Die Nullstellen liefern die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse.
Die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse sind also $N_1(5 | 0)$ und $N_2(1 | 0)$.
Setzt man in der Gleichung $y = x^2 - 6x + 5$ für x den Wert null ein, so erhält man die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse.
Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also Y(0 | 5).

Gleichungen für die Koordinatenachsen:
Die x-Achse lässt sich mit der Gleichung $y = 0$, die y-Achse mit der Gleichung $x = 0$ beschreiben.

7 Schnittpunkte von Parabel und Gerade berechnen

Zur Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte einer Parabel mit einer Geraden setzt man die beiden Funktionsterme gleich und erhält so die x-Koodinaten der Schnittpunkte.

$$y = x^2 - 6x + 7$$
$$y = -x + 1$$

$$x^2 - 6x + 7 = -x + 1 \qquad | + x - 1$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x_{1,2} = +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$
$$x_{1,2} = +2{,}5 \pm 0{,}5$$
$$x_1 = 3; \; x_2 = 2$$

Setzt man die x-Werte in eine der beiden Gleichungen ein, so bekommt man die jeweiligen y-Koordinaten:

$$y_1 = -2 \quad \text{und} \quad y_2 = -1.$$

Die Schnittpunkte sind also $P(3\,|-2)$ und $Q(2\,|-1)$.

Rechnerische Lösung:
1. Funktionsterme gleichsetzen.
2. Quadratische Gleichung lösen, um die x-Werte der Schnittpunkte zu bestimmen.
3. y-Werte durch Einsetzen der x-Werte berechnen.

Parabeln und Geraden:
Eine Parabel kann mit einer Geraden zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam haben.
In der Rechnung erkennt man dies an der Diskriminante.
(Siehe auch Seite 20 und 46.)

8 Schnittpunkte von zwei Parabeln berechnen

Die Parabeln mit den Gleichungen $y = x^2 - 4x - 1$ und $y = -x^2 + 5$ schneiden sich in den Punkten A und B.

Zur Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte setzt man die beiden Funktionsterme gleich und erhält so eine Gleichung für die x-Koodinaten der Schnittpunkte.

$$y = x^2 - 4x - 1$$
$$y = -x^2 + 5$$

$$x^2 - 4x - 1 = -x^2 + 5 \qquad | + x^2 - 5$$
$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \qquad | : 2$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1^2 + 3}$$
$$x_{1,2} = +1 \pm 2$$
$$x_1 = 3; \; x_2 = -1$$

Zur Berechnung der y-Werte für die Punkte A und B werden die x-Werte in eine der beiden Gleichungen eingesetzt:

$$y_1 = -3^2 + 5$$
$$y_1 = -4$$
$$y_2 = -(-1)^2 + 5$$
$$y_2 = 4$$

Die Schnittpunkte sind also $A(3\,|-4)$ und $B(-1\,|\,4)$.

Lage der Parabeln und Anzahl der Schnittpunkte:
Zwei Lösungen:
Die Parabeln schneiden sich in zwei Punkten.
Eine Lösung:
Die Parabeln berühren oder schneiden sich in einem Punkt.
Keine Lösung:
Die Parabeln haben keinen gemeinsamen Punkt.

Hier finden Sie sowohl Übungsaufgaben, die den Testaufgaben ähneln, als auch vertiefende Aufgaben, die einen etwas höheren Schwierigkeitsgrad haben. Daher helfen Ihnen am Anfang die Musterlösungen des Tests, wenn Sie nicht wissen, wie man bei der Lösung der Aufgabe vorgehen soll.
An einzelnen Stellen werden Themen vertieft und etwas weiter gedacht. Diese Stellen sind als EXKURS gekennzeichnet.

1 Funktionsgleichungen aus Schaubildern bestimmen

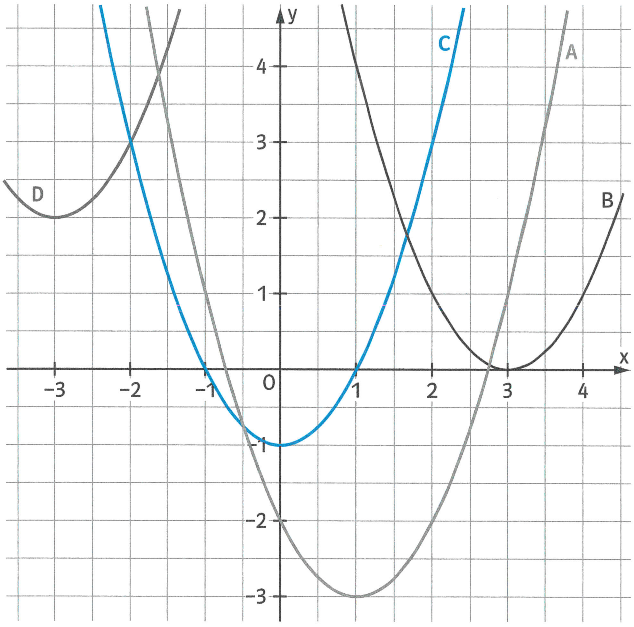
Ordnen Sie den Graphen die entsprechenden Funktionsgleichungen zu.

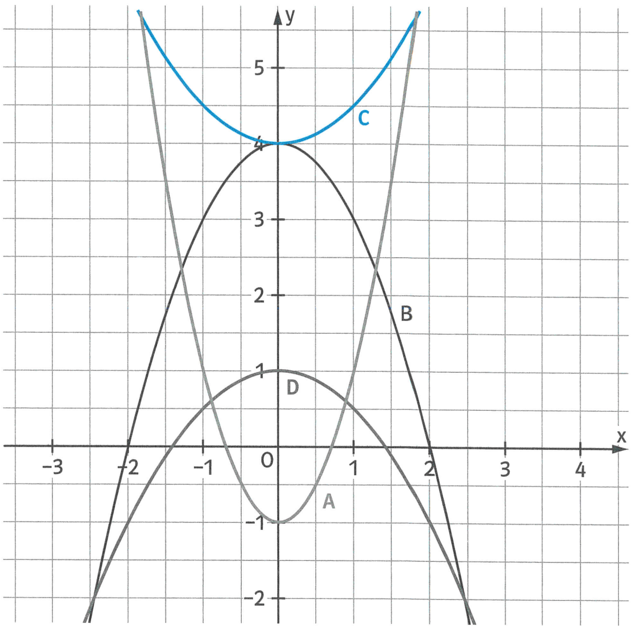
a) $y = (x-1)^2 - 3$ ______ $y = x^2 - 1$ ______

$y = (x+3)^2 + 2$ ______ $y = (x-3)^2$ ______

b) $y = -x^2 + 4$ ______ $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ ______

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ ______ $y = 2x^2 - 1$ ______





2 Graphen von quadratischen Funktionen zeichnen

Wandeln Sie die Gleichung in die Scheitelform um und zeichnen Sie den Graphen.

a) $y = x^2 - 2x + 4$

____

____

b) $y = x^2 + 4x$

____

____

c) $y = x^2 - 6x + 10$

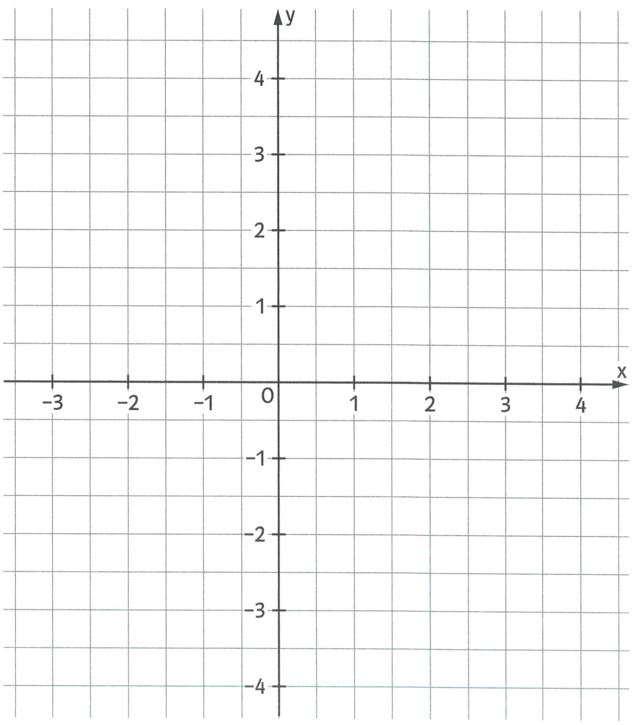
____

____

d) $y = x^2 + 8x + 14$

____

____



3 Graphen von quadratischen Funktionen f mit $f(x) = ax^2 + c$ zeichnen

Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

x						
y						

b) $f(x) = -2x^2 + 4$

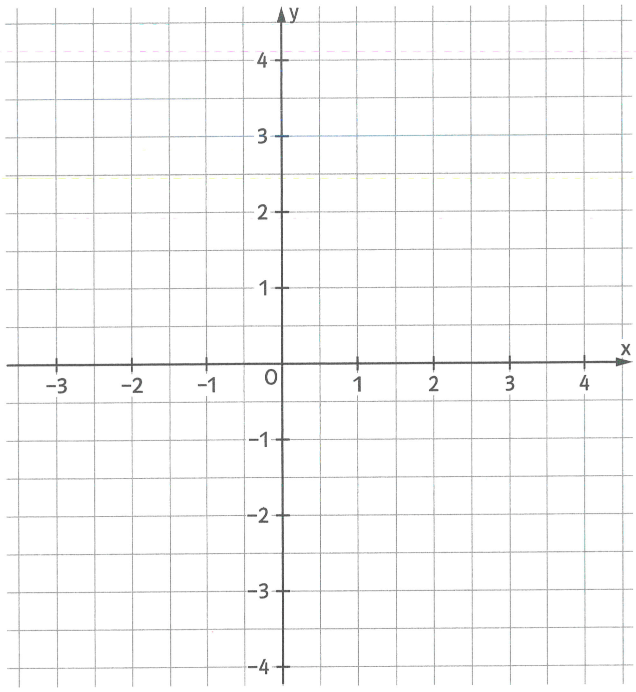
x						
y						

c) $f(x) = -x^2 + 3$

x						
y						

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 4$

x						
y						



EXKURS – Graphen von Funktionen f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel, deren Scheitel in x- und in y-Richtung verschoben ist. Sie ist breiter oder schmaler als die Normalparabel.
Beispiel: $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$

Der Graph kann auf unterschiedliche Art gezeichnet werden:

Mithilfe einer Wertetabelle

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	4	−2	−4	−2	4	14

Mithilfe der Scheitelform

Sie kann in die Scheitelform

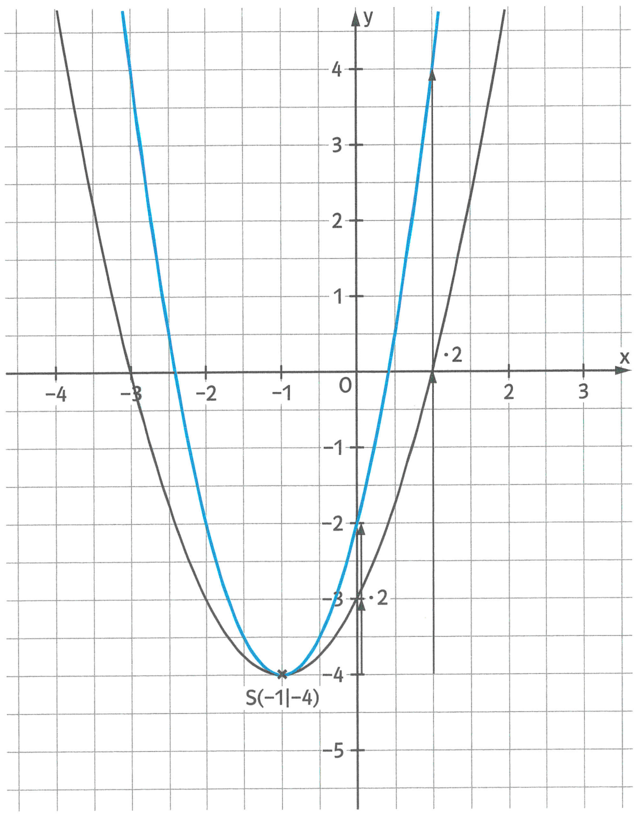
$\mathbf{y = a(x - d)^2 + c}$

gebracht werden.

$y = 2x^2 + 4x - 2$
$y = 2(x^2 + 2x) - 2$
$y = 2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 2$
$y = 2(x + 1)^2 - 4$

Aus dieser Gleichung lässt sich der Scheitel S(d | c) ablesen.
Also ist der Scheitel S(−1 | −4).
Der Faktor a = 2 ist der Streckfaktor der Parabel. Er verändert die Form der Normalparabel.

Beispiel:



Mithilfe der Nullstellen der Funktion

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Parabel kann aus dem Mittelwert der Nullstellen die x-Koordinate des Scheitels berechnet werden.
Im Beispiel ergibt sich $x_S = -1$.
Die y-Koordinate lässt sich durch Einsetzen in die Funktionsgleichung berechnen:

$y_S = 2(-1)^2 + 4(-1) - 2$

$y_S = -4$

Man erhält den Scheitel $S(-1\,|\,-4)$; die Parabel ist schmaler (enger) als die Normalparabel. Die verschobene Normalparabel wird mit dem Faktor 2 gestreckt.

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion auf verschiedene Arten.

a) $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = -x^2 - 3x + 2$

4 Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + px + q$ aus zwei Punkten bestimmen

Bestimmen Sie die Gleichung einer verschobenen Normalparabel, die durch die Punkte A und B verläuft.

a) $A(1\,|\,2)$ und $B(4\,|\,-1)$ ____________

b) $A(4\,|\,2)$ und $B(7\,|\,5)$ ____________

c) $A(-1\,|\,-3)$ und $B(-4\,|\,0)$ ____________

d) $A(0\,|\,2)$ und $B(2{,}5\,|\,-1{,}75)$ ____________

Bestimmen Sie die Parabelgleichung $y = ax^2 + c$ der in y-Richtung verschobenen Parabel mit dem Scheitel S und dem Punkt P.

e) $S(0\,|\,-5)$ und $P(2\,|\,-3)$ ____________

f) $S(0\,|\,2)$ und $P(-2\,|\,-6)$ ____________

5 Parabelgleichung aus der unvollständigen Parabelgleichung und einem Punkt

Bestimmen Sie die Parabelgleichung der verschobenen Normalparabel mit dem Punkt P.

a) $y = x^2 + 4x + q$ und $P(-4\,|\,2{,}5)$

q = ____________

b) $y = x^2 - 6x + q$ und $P(2\,|\,-4)$

q = ____________

c) $y = x^2 + px + 5$ und $P(2\,|\,5)$

p = ____________

d) $y = x^2 + px - 2$ und $P(-3\,|\,1)$

p = ____________

6 Nullstellen einer Funktion

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

x_1 = ________ x_2 = ________

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x_1 = ________ x_2 = ________

c) $f(x) = x^2 + 6x + 8$

x_1 = ________ x_2 = ________

d) $f(x) = 2x^2 + 5x$

x_1 = ________ x_2 = ________

Berechnen Sie die Schnittpunktkoordinaten der Parabel mit den Koordinatenachsen.

e) $f(x) = x^2 - 8x + 7$ ____________

f) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ____________

g) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ ____________

h) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ____________

7 Schnittpunkte von Parabel und Gerade

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel p und Gerade g.

a) p: $y = x^2 - 2x - 3$ und g: $y = 2x - 3$

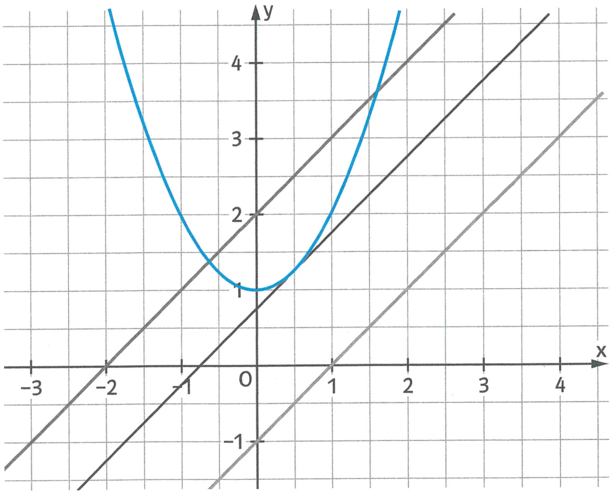
b) p: $y = x^2 + 4x + 1$ und g: $y = -2x - 4$

c) p: $y = x^2 - 3x - 1{,}75$ und g: $y = -\frac{1}{2}x + 1{,}75$

d) p: $y = x(x + 3)$ und g: $y = -x - 4$

EXKURS – Tangenten, Sekanten und Passsanten

Es gibt drei Möglichkeiten, wie eine Parabel und eine Gerade zueinander liegen können:
Es gibt **zwei** Schnittpunkte, die Gerade heißt dann **Sekante**.
Es gibt **einen** Berührpunkt, die Gerade heißt dann **Tangente**.
Es gibt **keinen** gemeinsamen Punkt, die Gerade heißt dann **Passante**.



Rechnerisch erhält man beim Gleichsetzen der Gleichungen von Parabel und Gerade eine quadratische Gleichung. Die Diskriminante der Lösungsformel kann zur Fallunterscheidung genutzt werden.

Beispiel: p: $y = x^2 + 4x + 5$ und g: $y = -2x - 4$
Man erhält für die Diskriminante den Wert 0, die Gleichung hat also nur eine Lösung. Parabel und Gerade haben einen gemeinsamen Punkt, den Berührpunkt. Die Gerade ist Tangente.
Der Berührpunkt hat die Koordinaten T(−3 | 2).

a) Überprüfen Sie rechnerisch dieses Ergebnis und zeichnen Sie das zugehörige Schaubild.

b) Stellen Sie rechnerisch und zeichnerisch fest, welche der drei Geraden mit der Parabel $y = x^2 + 2x - 1$ zwei, einen oder keinen gemeinsamen Punkt hat.

g: $y = 2x - 1$ __________

h: $y = \frac{1}{2}x - 2$ __________

l: $y = x + 1$ __________

c) Die Parabel $y = x^2 - 4x + 3$ und die Gerade $y = -2x + a$ haben für a = 3 zwei Punkte gemeinsam.

P(___ | ___) Q(___ | ___)

Wie muss man a wählen, wenn die Gerade die Parabel berühren soll?

Überprüfen Sie durch Zeichnung.

8 Schnittpunkte zweier Parabeln

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Parabeln.

a) $y = x^2 - 4x + 7$ und $y = x^2 - 10x + 25$

b) $y = x^2 - 6x + 8$ und $y = -x^2 + 4$

c) $y = 2x^2 - 1$ und $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

d) $y = (x - 4)(x + 1)$ und $y = -(x - 4)^2$

e) Wie müssen die Parabeln zueinander liegen, damit sie keinen Punkt gemeinsam haben?
Geben Sie mindestens zwei Beispiele für verschiedene Fälle an und beschreiben Sie die Fälle allgemein.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

auf dieser Seite stellen wir den zweiten Teil dieses Arbeitshefts vor und erklären, wie man damit üben kann.

Rückblick

Im ersten Teil dieses Arbeitsheftes haben Sie überwiegend aus dem Unterricht bekannte Beispiele und Aufgaben wiederholt. Exkursionen sollten Ihnen einen kleinen Ausblick auf weiterführende Themen bieten. Dieser Teil sollte vor allem dazu dienen, dass Sie in Mathematik **fit bleiben**.

Die Inhalte des zweiten Teils

In der Oberstufe werden immer wieder die mathematischen Kompetenzen Modellieren, Problemlösen, Interpretieren und Argumentieren zum Bearbeiten von Aufgaben notwendig sein. In den drei folgenden Kapiteln können Sie sich intensiv mit diesen Themen beschäftigen, Sie können Ihre Kenntnisse vertiefen und Ihre mathematischen Fähigkeiten üben.
Vielleicht werden Ihnen manche Formulierungen von Aufgaben zunächst ungewohnt erscheinen, die Aufgaben werden Ihnen deshalb sicher auch schwieriger vorkommen. Im diesem zweiten Teil dieses Arbeitsheftes lernen Sie solche neuen Aufgaben kennen, die Ihnen helfen sollen, für die Oberstufe **fit zu werden**. Das mathematische Werkzeug zum Lösen dieser Aufgaben können Sie mit den Aufgaben aus dem ersten Teil üben. Jetzt geht es darum, diese erlernten Methoden und Fertigkeiten zu verknüpfen und richtig einzusetzen.

Überblick und Selbsteinschätzung

Jedes Kapitel im zweiten Teil beginnt mit einem kurzen Überblick über das Thema des Kapitels. Anschließend können Sie, genau so wie schon im ersten Teil, selbst einschätzen, wie gut Sie die Kompetenzen, die im jeweiligen Kapitel behandelt werden, beherrschen.
Diese Selbsteinschätzung geben Sie zunächst spontan ab, bevor Sie anfangen, das Kapitel zu bearbeiten. Nach der Bearbeitung der Einführungsbeispiele und der Musterlösungen können Sie bereits besser beurteilen, wie gut Sie über die jeweiligen Kompetenzen tatsächlich verfügen oder wo Sie noch nacharbeiten sollten.

Einführungsbeispiele

Ausführlich gelöste Aufgaben führen Sie in die Arbeitsweise des jeweiligen Kapitels ein. Die Lösungen sind dabei als Vorschläge zu verstehen. Andere Lösungswege sind ebenfalls möglich und erwünscht. Sie bekommen dabei Tipps für eigene Lösungen und Anhaltspunkte, wie umfangreich diese sein sollten. Den größten Nutzen bringen Ihnen die Einführungsbeispiele dann, wenn Sie nicht nur die Lösungen nachvollziehen, sondern selbst versuchen, die Aufgaben zu lösen.

Brückenaufgaben

Aufgaben werden in der Oberstufe häufig kompakter und mit weniger Teilschritten formuliert, als Sie es gewohnt sind. Bei den Brückenaufgaben sind notwendige Zwischenschritte als Hilfe formuliert. So erhalten Sie eine Hilfestellung, wenn Ihnen bei den Aufgaben in diesem Kapitel die Kurz-Formulierung zu schwierig erscheint. Diese „Übersetzungsarbeit“ sollten Sie bei späteren Aufgaben selbst leisten.

Übungsaufgaben

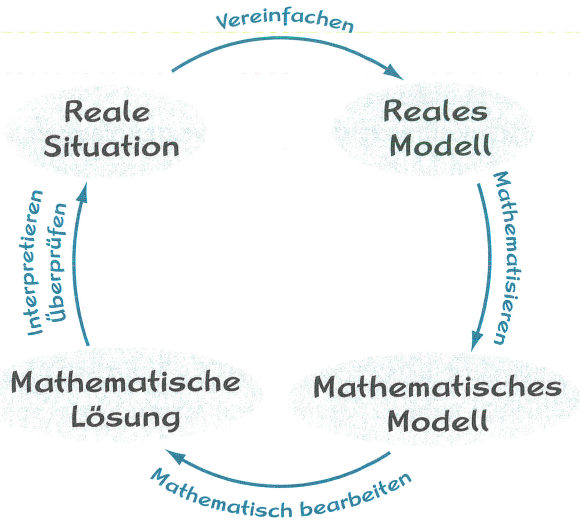
Zu jedem Einführungsbeispiel und zu vielen Brückenaufgaben gibt es ähnliche Übungsaufgaben, mithilfe derer Sie die jeweilige Kompetenz eines Kapitels noch einmal üben können. Hierzu können die Musterlösungen der Einführungsbeispiele und die Zwischenschritte der entsprechenden Brückenaufgaben nützlich sein. Wenn Sie das Gefühl haben, die Übungsaufgaben des jeweiligen Kapitels sicher zu beherrschen, können Sie Ihre Kompetenzen mit den weiteren Übungsaufgaben festigen.

5 Modellieren

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Fragestellungen aus dem Alltag. Sie machen sich bewusst, wie die Mathematik hilft, solche Fragen zu beantworten, und wie Sie überprüfen können, ob die Lösungen, die Sie mithilfe der Mathematik gefunden haben, alltagstauglich sind.

Der Modellierungskreislauf

1. Schritt: Vereinfachen
Die reale Situation muss vereinfacht werden, indem komplizierte durch einfachere, etwa geometrische Formen ersetzt werden wie im ersten Einführungsbeispiel. Häufig sucht man auch nach einer Lösung für einen Spezialfall oder man lässt weniger wichtige Einzelheiten außer Acht.



2. Schritt: Mathematisieren
Das so entstandene reale Modell wird nun in ein mathematisches Modell übersetzt. Dazu dienen z. B. geometrische Figuren, Diagramme, Funktionen und Gleichungen.

3. Schritt: Mathematisch bearbeiten
Mit mathematischen Mitteln wird die Lösung des Problems für das mathematische Modell bestimmt.

4. Schritt: Überprüfen, Interpretieren
Die mathematische Lösung muss nun wieder auf die reale Situation übertragen werden. Wenn sie für die reale Situation passt, ist das Problem gelöst. Wenn nicht, dann muss das reale oder das mathematische Modell verbessert werden und der Modellierungskreislauf beginnt von vorn.

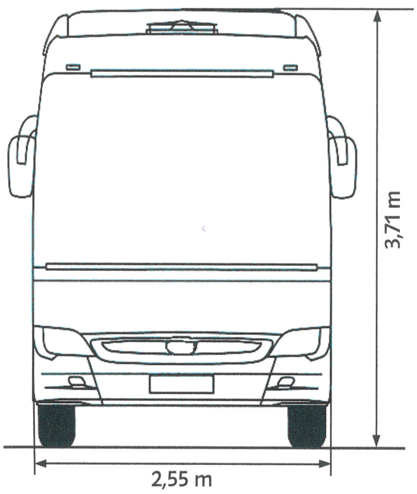
Bevor Sie anfangen zu üben, sollten Sie eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 abgeben. Anschließend können Sie die Einführungsbeispiele bearbeiten und mithilfe der Musterlösungen auswerten. So erkennen Sie Ihre Stärken und Schwächen und können nun gezielt üben.

Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Einführungsbeispiele	SE nach Bearbeitung des Kapitels
1. Ich kann eine reale Situation mit mathematischen Mitteln vereinfacht darstellen.			
2. Ich kann Größen eines realen Objektes mithilfe einer vereinfachten Darstellung berechnen.			
3. Ich kann einen realen Vorgang mit einer linearen oder quadratischen Funktion beschreiben.			
4. Ich kann einen proportionalen Zusammenhang grafisch veranschaulichen.			
5. Ich kann einen proportionalen Zusammenhang durch eine Gleichung ausdrücken.			

1 Ein mittelalterliches Stadttor

a) Ein Reisebus kommt auf seiner Fahrt zum mittelalterlichen Stadttor in Sulzburg, das an der höchsten Stelle 4,10 m hoch und auf Fahrbahnhöhe 4,00 m breit ist.
Welchen Rat würden Sie dem Busfahrer geben?

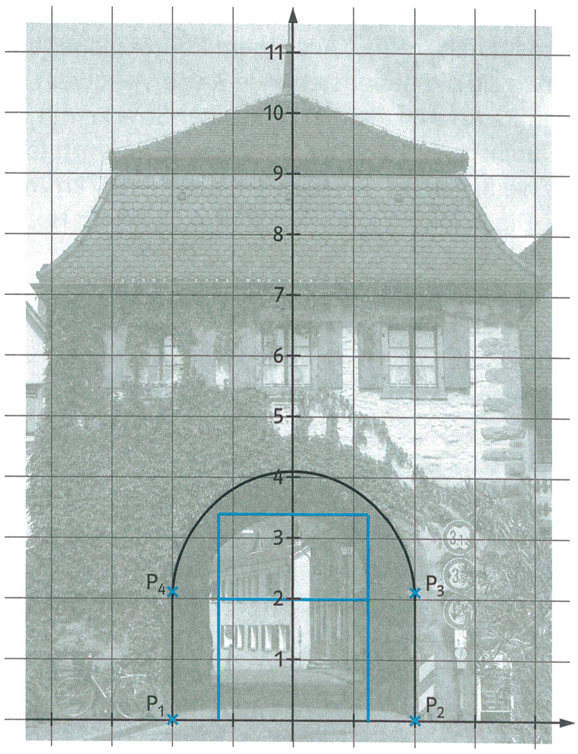



Stadttor in Sulzburg

Lösung
Die reale Situation ist im Aufgabentext beschrieben.

• Wir vereinfachen die reale Situation
Wir stellen das Tor als Halbkreisbogen dar, der über zwei senkrechten Stützmauern errichtet ist. Den Bus vereinfachen wir durch ein Rechteck.

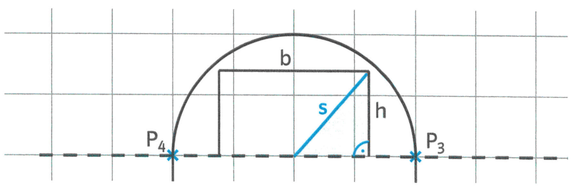
• Wir mathematisieren das reale Modell
Wir legen über das Bild ein Koordinatensystem, sodass die y-Achse mit der Symmetrieachse des Tors und die x-Achse mit der Straße bei der Toreinfahrt übereinstimmen. Die Einheiten auf den Achsen entsprechen jeweils 1 m. Die Maße des Tors sind gegeben: Torbreite: 4,00 m; Radius des Bogens: 2,00 m
Torhöhe: 4,10 m; Höhe der Stützmauern: 2,10 m



• Wir lösen die Aufgabe mathematisch
Wir nehmen an, dass der Reisebus mitten auf der Straße durch das Tor fährt. Damit er gefahrlos durch das Tor kommt, muss der Abstand s kleiner als der Radius des Torbogens sein.

$b = 2{,}55$
$h = 3{,}71 - 2{,}10 = 1{,}61$
$s = \sqrt{1{,}275^2 + 1{,}61^2}$

Der Abstand s ist ungefähr 2,05 m, also größer als der Radius des Torbogens.



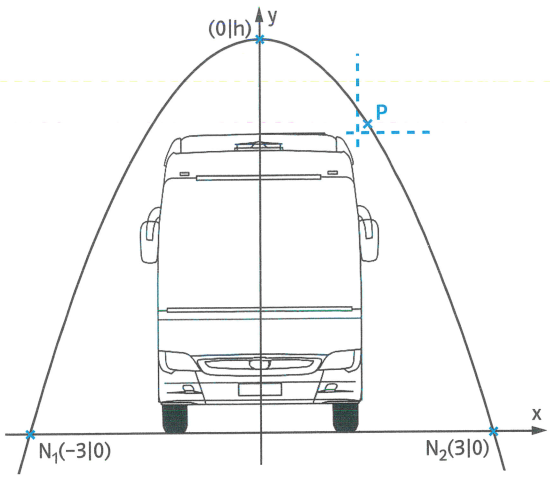
• Wir überprüfen das Ergebnis für die reale Situation
Der Busfahrer sollte nicht durch das Tor fahren.

Variation der Torbogenform

b) Welche Höhe muss ein parabelförmiges Tor haben, das in Höhe der Fahrbahn 6 m breit ist und durch das der Reisebus gefahrlos fahren kann?

Lösung

- Ansatz für die Parabelgleichung: $y = -a x^2 + h$
- Die Breite des Tors ist der Abstand zwischen den x-Achsenschnittpunkten N_1 und N_2 der Parabel; einsetzen in die Parabelgleichung:
  $0 = -9a + h$
  Nach h auflösen: $h = 9a$
- Zur Seite und nach oben muss ein Sicherheitsabstand eingehalten werden. Wir legen deshalb einen Parabelpunkt P fest, der mindestens 10 cm rechts und 10 cm oberhalb des Busses liegt, z. B. $P(1{,}40 \mid 3{,}81)$.
  Einsetzen in die Parabelgleichung ergibt:
  $3{,}81 = -1{,}96a + 9a$, also $a \approx 0{,}54$ und $h \approx 4{,}86$.
- Das Tor sollte wenigstens 5 m hoch sein.



2 Eine Fahrradtour

a) Alex startet mit seinem Fahrrad in Bad Boll (A), Boris in Schwäbisch Gmünd (B). Sie wollen sich auf dem Hohenstaufen treffen. Aus einem Routenplaner entnehmen sie die nebenstehende Karte. Alex weiß von seinen Radtouren, dass er auf seiner Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 20 km/h fährt; Boris weiß, dass er auf seiner Strecke mit 17 km/h fährt. Die beiden treffen sich um 14:00 Uhr in Hohenstaufen.
Sind sie gleichzeitig losgefahren?
Beantworten Sie diese Frage
mithilfe einer Rechnung,
mithilfe eines Weg-Zeit-Diagramms.

Rechnerische Lösung

Die reale Situation ist im Aufgabentext beschrieben.

- **Wir vereinfachen die reale Situation**
  Wir nehmen an, dass beide mit konstanter Geschwindigkeit fahren.

- **Wir mathematisieren das reale Modell und lösen es rechnerisch**

- Alex benötigt $t = \frac{17{,}5\,\text{km}}{20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}875\,\text{h} = 52{,}5\,\text{min}$

  Boris benötigt $t = \frac{15\,\text{km}}{17\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}882\,\text{h} \approx 52{,}9\,\text{min}$

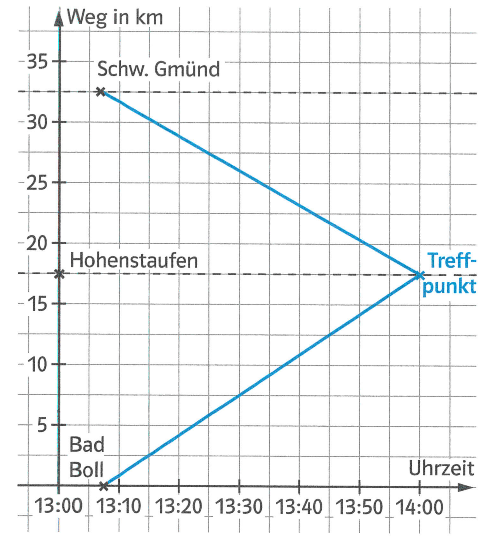
- Sie sind etwa gleichzeitig losgefahren.

Für die **Durchschnittsgeschwindigkeit** gilt:
$v = \frac{s}{t}$
Wenn man die Gleichung umstellt, erhält man:
$t = \frac{s}{v}$ bzw. $s = v \cdot t$

Grafische Lösung

Vom Treffpunkt (14:00 | 17,5) Hohenstaufen aus zeichnen Sie die Geraden, die die Bewegungen von Alex und Boris beschreiben, mithilfe von Steigungsdreiecken ein. Zum Beispiel war Alex um 13:30 Uhr noch 10 km und Boris noch 8,5 km vom Treffpunkt entfernt. Die Gerade von Alex schneidet die Null-km-Linie (Bad Boll) etwa 13:07 Uhr, die Gerade von Boris trifft die 32,5-km-Linie (Schwäbisch Gmünd) ebenfalls etwa 13:07 Uhr.

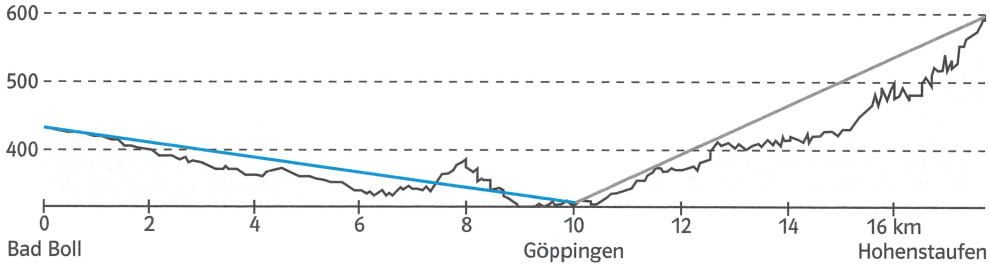
Alex und Boris sind etwa gleichzeitig gestartet.



Weg-Zeit-Diagramm
Man trägt die Zeit nach rechts und die zurückgelegte Strecke nach oben ab.

Steigungsdreieck
Siehe Seite 25.

b) Da die Strecke von Bad Boll nach Hohenstaufen bis Göppingen fällt und bis Hohenstaufen steigt, fährt Alex auf dem ersten Teilstück deutlich schneller als auf dem zweiten Teilstück. Bestimmen Sie zwei mögliche Durchschnittsgeschwindigkeiten für die Teilstrecken, sodass sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 20 km/h insgesamt ergibt.



Alex fährt mit konstanter Geschwindigkeit von Bad Boll nach Göppingen und ebenfalls mit konstanter, aber niedrigerer Geschwindigkeit nach Hohenstaufen.

Rechnerische Lösung

Alex braucht für die gesamte Strecke $t = \frac{17{,}5\,\text{km}}{20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}875\,\text{h}.$

Wenn er das erste Teilstück zum Beispiel mit $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, braucht er $t_1 = \frac{10\,\text{km}}{30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}333\,\text{h}.$

Für das zweite Teilstück bleiben dann $t_2 \approx 0{,}875\,\text{h} - 0{,}333\,\text{h} = 0{,}542\,\text{h}.$

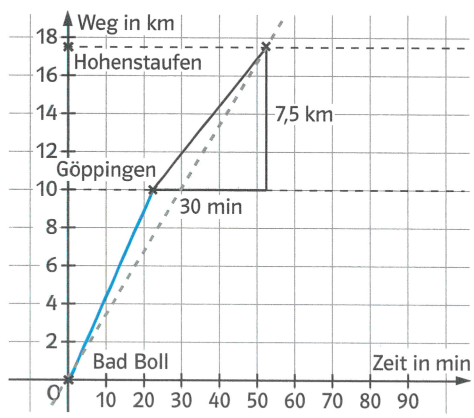
Das ergibt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v \approx \frac{7{,}5\,\text{km}}{0{,}542\,\text{h}} \approx 13{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem ersten Teilstück ist nicht festgelegt. Lösen Sie die Aufgabe noch einmal mit einem anderen Wert.

Grafische Lösung

Im Diagramm zeichnen Sie für Göppingen einen möglichen Punkt, z. B. (22,5 min | 10 km) ein. Dabei ergeben sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten:

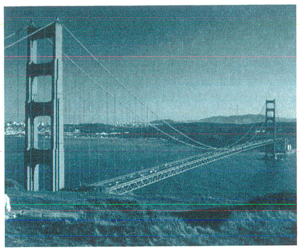
$v_1 = \frac{10\,\text{km}}{22{,}5\,\text{min}} \approx 26{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v_2 = \frac{7{,}5\,\text{km}}{30\,\text{min}} = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$



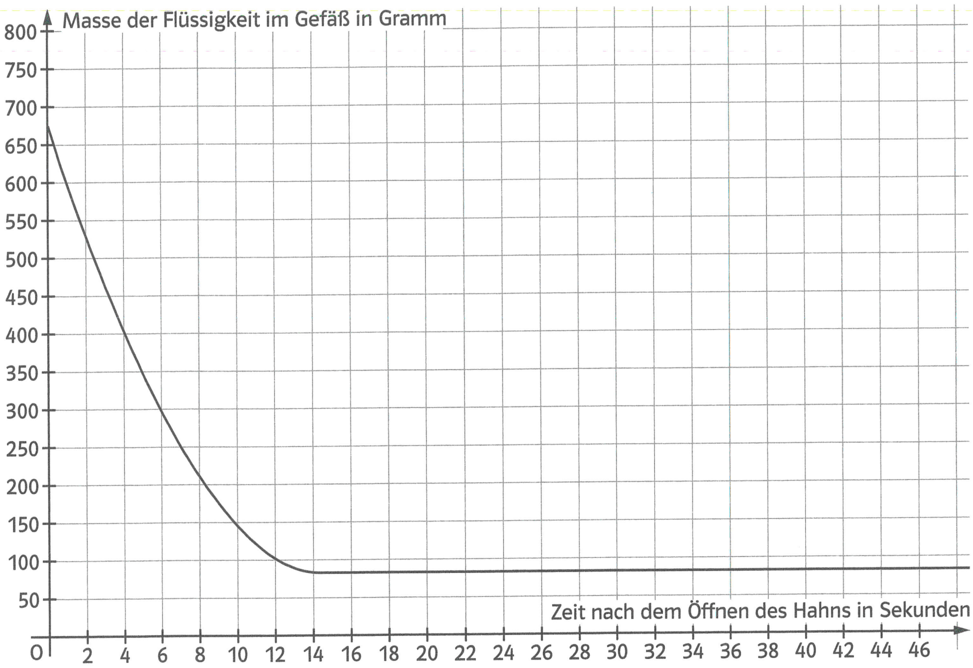
Ergebnis für die Realität

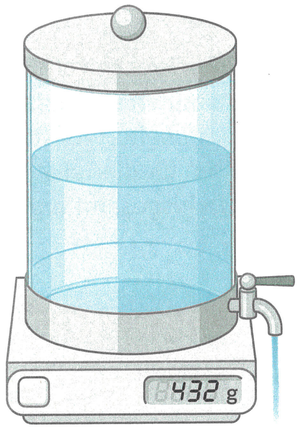
Das erste Ergebnis kommt der Realität am nächsten, da Alex wegen der großen Steigung von Göppingen nach Hohenstaufen eher mit niedrigerer Geschwindigkeit fährt. Beide Lösungen sind möglich.

1 Ein Gefäß läuft aus



Das abgebildete Saftgefäß ist 24 cm hoch und hat einen kreisförmigen Querschnitt. Mit diesem Gefäß wurde folgendes Experiment durchgeführt:
Es wurde vollständig mit Wasser gefüllt. Dann wurde der Hahn ein wenig geöffnet und die Flüssigkeit lief aus. Dabei wurde die Masse des Wassers im Gefäß gemessen und folgendes Diagramm erstellt:





a) Nach welcher Zeit ist das Gefäß nur noch halb voll? ______________________

b) Beschreiben Sie den Vorgang in Worten.

____

____

____

____

Zwischenschritte
Beachten Sie, dass das Schaubild zwei unterschiedliche Phasen darstellt.
Was bedeutet die waagrecht verlaufende Linie?
Warum verläuft sie nicht auf der Null-Linie?
Was können Sie aus der Tatsache schließen, dass die erste Phase nicht durch eine Gerade beschrieben wird?

c) Wie würde der Verlauf der Kurve aussehen, wenn der Hahn etwas weiter geöffnet würde? Tragen Sie einen veränderten Verlauf in das Diagramm ein.

____

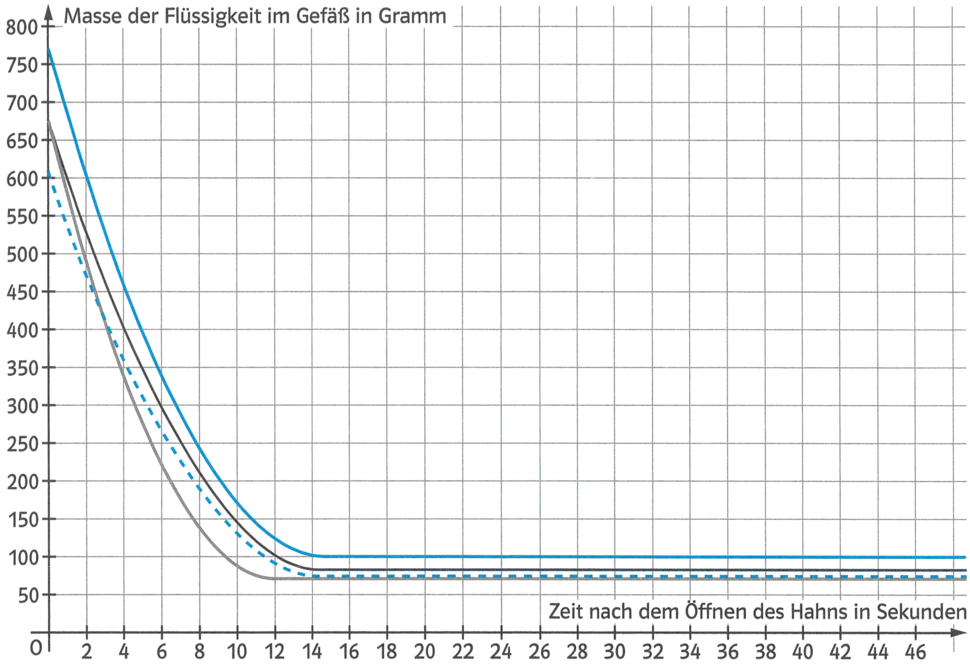
____

____

____

Zwischenschritte
Überlegen Sie, welche der folgenden Größen gleich bleiben oder sich verändern, wenn der Hahn weiter geöffnet wird:
- Anfangsmenge
- Restmenge
- Ende des Auslaufprozesses

d) Welche Kurve (______; --------- oder ______) würde gemessen, wenn sich Benzol in dem Gefäß befinden würde und der Auslaufprozess ebenfalls nach 15 Sekun-den beendet wäre? (1 Liter Benzol wiegt nur 0,9 kg.)
Die schwarze Kurve zeigt zum Vergleich die Messkurve von Wasser.



Der Verlauf wird durch die ________________________ Kurve

wiedergegeben, weil ________________________

e) Welche Größen des Saftbehälters kann man mithilfe des Diagramms berechnen?

____

____

> **Zwischenschritte**
> Überlegen Sie auch bei dieser Aufgabe, welche Größen gleich bleiben oder sich verändern, wenn der Hahn weiter geöffnet wird:
> - Anfangsmenge
> - Restmenge
> - Ende des Auslaufprozesses

> **Zwischenschritte**
> Bestimmen Sie mithilfe des Anfangsvolumens die Querschnittsfläche und den Durchmesser des Gefäßes. Bestimmen Sie mithilfe des Restvolumens die Höhe, in der der Hahn angebracht ist.

2 Ein tropfender Hahn – und keine Zeit zum Reparieren

Herr Vogel stellt am Sonntagmorgen fest, dass in einem 3 m × 2,5 m großen Kellerraum ein Wasserhahn tropft. Er stellt einen Zahnputzbecher unter den Hahn, der aber bereits nach 30 Minuten gefüllt ist. Herr Vogel hat jedoch keine Zeit, den Hahn zu reparieren, da er dringend wegfahren muss. Er wird erst am Mittwochabend zurückkommen. Deshalb stellt er einen 5-Liter-Eimer unter den Hahn. Herr Vogel beobachtet den tropfenden Hahn und stellt fest, dass in einer Minute 40 Tropfen fallen. Was sieht Herr Vogel am Mittwochabend?

____

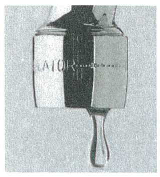
____

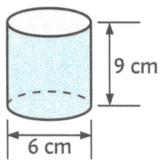
____

____

____

____





> **Zwischenschritte**
> Berechnen Sie das Volumen des Zahnbechers.
> Um welchen Faktor ist das Volumen des Eimers größer?
> Um welchen Faktor wird deshalb die Füllzeit verlängert?
> Was kann man mit der Information „3 m × 2,5 m" ausrechnen?
> Wie hoch könnte das Wasser im Kellerraum stehen?
> Was kann man mit der Information „40 Tropfen pro Minute" ausrechnen?
> Welche Menge Wasser tropft in einer Minute?

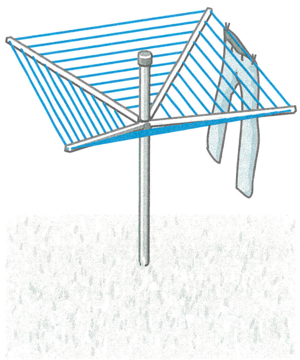
3 Bahntarif

Die Deutsche Bahn kündigte zum 1.2.2000 eine Tariferhöhung an, und zwar in den alten Bundesländern um 2,5% und in den neuen Bundesländern um 3,5%. Nach der Preiserhöhung waren die Tarife im gesamten Bundesgebiet gleich.
Um wie viel Prozent teurer waren Fahrkarten in den alten Bundesländern gegenüber den neuen vor dem 1.2.2000?

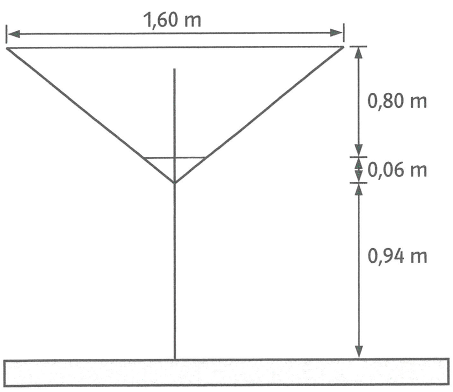
Zwischenschritte
Was hat eine Fahrkarte, die heute z.B. 20€ kostet, vor der Preiserhöhung in den neuen bzw. in den alten Bundesländern gekostet?
Stellen Sie jeweils eine Gleichung auf, mit der man die alten Fahrkartenpreise in Abhängigkeit vom neuen Preis berechnen kann.

4 Wäschespinne

Die Leine einer Wäschespinne ist an einigen Stellen brüchig geworden und muss ersetzt werden. Die Wäschespinne ist insgesamt 1,80 m hoch, das Gelenk, an dem die Streben nach außen befestigt sind, ist 0,94 m hoch. Die oberen Enden der Streben haben zueinander jeweils 1,60 m Abstand. Die Leine wird in 1,00 m Höhe unten in die erste Strebe eingefädelt und von dort aus in zehn horizontalen Ebenen nach oben geführt.
Finden Sie heraus, wie lang die neue Leine mindestens sein muss.



Zwischenschritte
Beschreiben Sie im **realen Modell** die Elemente der Wäschespinne und die Leine durch geometrische Figuren.
Im **mathematischen Modell** fertigen Sie eine Skizze an und legen die Maße fest.
Sie gehen davon aus, dass die Leine in gleichmäßigen Abständen 10-Mal ein Quadrat bildet.
Sie berechnen die Seitenlängen und damit den Umfang sämtlicher Quadrate mithilfe der Strahlensätze.



Ist Ihr Ergebnis plausibel? Überprüfen Sie es, wenn Sie die Möglichkeit haben, in der Realität.

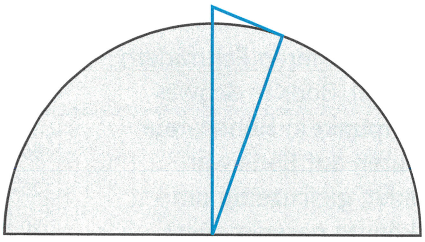
5 Das größte Riesenrad der Welt

Der Singapore Flyer ist mit einer Höhe von 165 m und einem Durchmesser von 150 m das größte Riesenrad der Welt. Es wurde 2008 in Betrieb genommen. Es steht in einer strandnahen Grünanlage am Rande der City im Stadtstaat Singapur und löste bei seiner Eröffnung den Stern von Nanchang als größtes Riesenrad der Welt ab. Das Riesenrad verfügt über 28 Gondeln, welche jeweils bis zu 28 Personen fassen, was eine Gesamtkapazität von 784 Personen ergibt.

Der Eintrittspreis für eine Fahrt pro Person beträgt umgerechnet etwa 15 Euro. Eine Umdrehung dauert etwa 30 Minuten. Auf Grund der geringen Geschwindigkeit können die Passagiere ein- und aussteigen, ohne dass das Riesenrad stoppen muss. Vom Singapore Flyer aus kann man bis Malaysia und übers Meer 40 km weit nach Indonesien sehen. Die Baukosten betrugen etwa 135 Millionen Euro und wurden von deutschen Investoren aufgebracht.

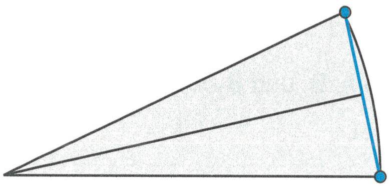

Singapore Flyer

a) Überprüfen Sie möglichst viele der in dieser Anzeige aus einem Singapur-Prospekt angesprochenen Sachverhalte.



Zwischenschritte
Berechnen Sie die Gesamtkapazität.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Gondel. Um bei laufendem Betrieb problemlos einsteigen zu können, sollte die Geschwindigkeit der Gondel deutlich unter der Fußgängergeschwindigkeit 5 km/h liegen.
Wie weit kann man von einem 165 m hohen Punkt über der Erdoberfläche sehen? Der Erdradius beträgt etwa 6370 km. Verwenden Sie zur Lösung die Skizze.

b) Welche Entfernung haben zwei benachbarte Gondeln?



Zwischenschritte
Berechnen Sie die Länge des Kreisbogens zwischen zwei Gondeln.
Überprüfen Sie, um wie viel Prozent die Länge der Sehne kürzer ist.

c) In welcher Höhe befindet sich ein Passagier zehn Minuten nach dem Einstieg?

Skizze:

Zwischenschritte
Fertigen Sie eine maßstäbliche Skizze des Riesenrades.
Berechnen Sie den Winkel, um den sich das Rad in 10 Minuten gedreht hat.
Bestimmen Sie die Höhe der Gondel über dem Erdboden zeichnerisch und berechnen Sie sie mithilfe einer Winkelfunktion.

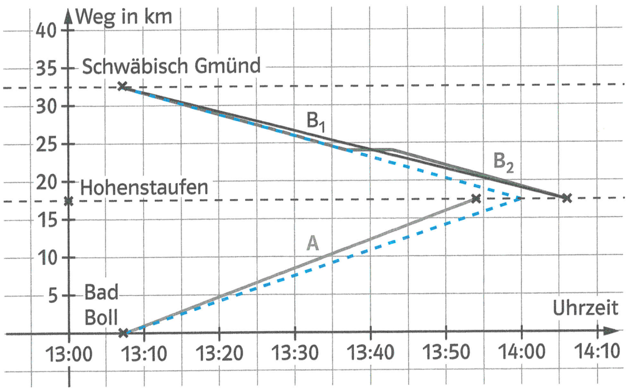
Mit den folgenden Aufgaben können Sie Ihre Fähigkeiten zu Modellieren vertiefen. Viele dieser Aufgaben ähneln den Musterbeispielen und den Brückenaufgaben. Daher können Sie die Lösungen und Tipps dieser Aufgaben verwenden, wenn Sie nicht weiter wissen.

1 Welche Angaben sollten auf den beiden Verkehrszeichen zur Begrenzung der zulässigen Fahrzeughöhe und -breite am Stadttor von Sulzburg stehen, die auf der Fotografie nicht lesbar sind?
Ergänzen Sie die möglichen Kombinationen in der Tabelle. Vergessen Sie dabei nicht, einen Sicherheitsabstand zu berücksichtigen:

Die Fotografie des Stadttors von Sulzburg finden Sie auf Seite 49.
Dort ist auch die Skizze, die den Zusammenhang zwischen Fahrzeughöhe und -breite beschreibt.

Breite in m	3,60	3,40				2,90	2,80		2,60
Höhe in m			2,80	2,90	3,10			3,30	

2 Alex und Boris fahren beide mit ihren Fahrrädern um 13:07 Uhr los, Alex in Bad Boll, Boris in Schwäbisch Gmünd. Als Alex am Treffpunkt in Hohenstaufen ankommt, muss er 6 Minuten auf Boris warten, anstatt dort, wie verabredet, gleichzeitig um 14:00 Uhr einzutreffen. Was könnte passiert sein? Das nebenstehende Weg-Zeit-Diagramm beschreibt drei Möglichkeiten.



a) Beschreiben Sie die Fahrten A, B_1 und B_2 in eigenen Worten:

A:

B_1:

B_2:

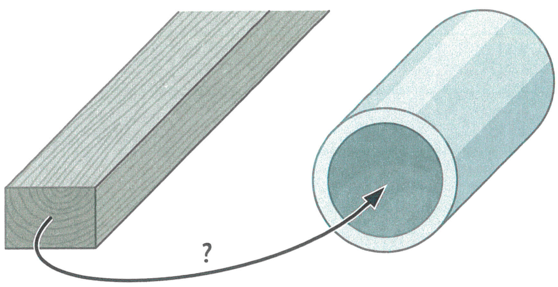
b) Tragen Sie in das Diagramm den Verlauf der folgenden Fahrt ein: „Boris fährt zuerst schneller, in den letzten 25 Minuten aber deutlich langsamer, sodass er erst um 14:06 Uhr ankommt".

3 Bestimmen Sie aus dem Geländeschnitt auf Seite 51 das durchschnittliche Gefälle auf der Strecke Bad Boll – Göppingen in Prozent und die durchschnittliche Steigung auf der Strecke Göppingen – Hohenstaufen in Prozent.

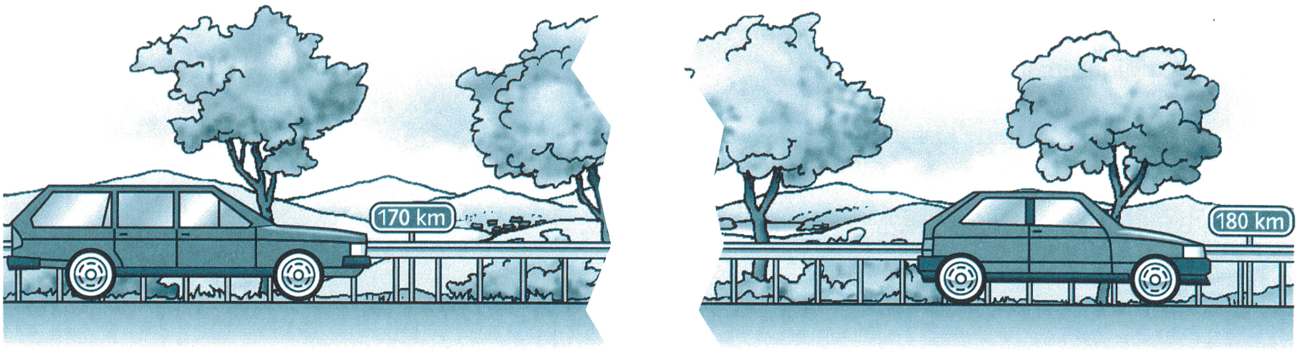
Höhenunterschied Bad Boll – Göppingen: ______ m Gefälle ______ %

Höhenunterschied Göppingen – Hohenstaufen: ______ m Steigung ______ %

4 Ist es möglich, einen Balken mit den Maßen 150 cm × 8 cm × 12 cm durch ein Rohr mit einem Innendurchmesser von 15 cm zu schieben?



5 Das Bild zeigt zwei PKW, die mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Autobahn fahren. Das erste Auto (im Bild rechts) fährt mit einer Geschwindigkeit von 110 km/h, das zweite Auto (im Bild links) fährt mit einer Geschwindigkeit von 140 km/h.



a) Bestimmen Sie für beide Wagen jeweils die Funktion, die angibt, an welcher Kilometermarkierung auf der Autobahn sich der Wagen nach x Stunden befindet.

1. Auto: $f_1(x) =$ ______________________

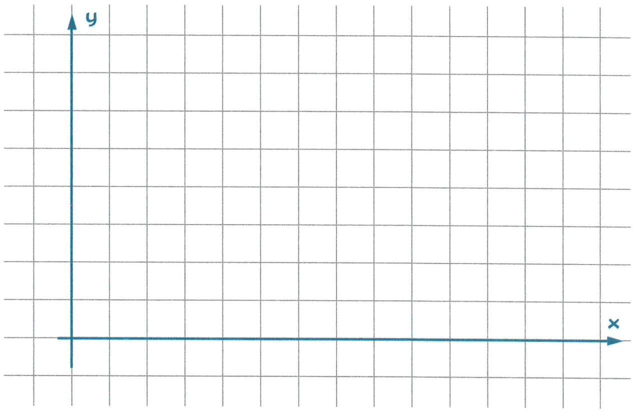
2. Auto: $f_2(x) =$ ______________________

b) Wann und wo überholt der zweite Wagen den ersten.

____

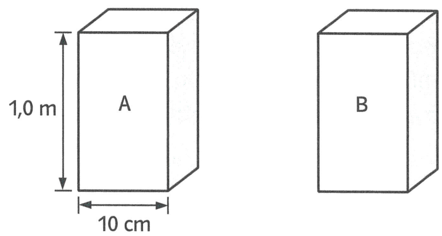
____

____



Der 2. Wagen überholt den 1. nach ______ Minuten an der Kilometermarke ______________.

6 Zwei Gefäße mit derselben quadratischen Grundfläche werden aus unterschiedlichen Rohren mit Wasser gefüllt. Der jeweilige Wasserzufluss ist konstant.
Im Gefäß A steht das Wasser zu Beginn des Füllens 13 cm hoch und steigt um 6 cm pro Minute. Gefäß B ist zu Beginn leer, nach 3 Minuten beträgt die Füllhöhe 24 cm.



a) Bestimmen Sie jeweils eine Funktion für die Wasserhöhe in cm nach x Minuten.

$f_A(x) =$ ______________________

$f_B(x) =$ ______________________

b) Nach welcher Zeit steht das Wasser in beiden Gefäßen gleich hoch?

____

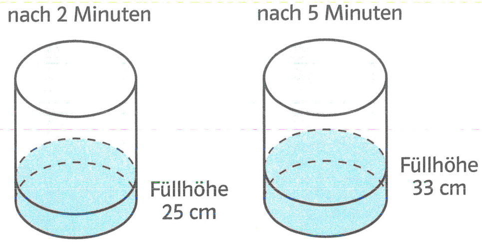
____

7 Hannah sucht für ihren Freund Felix im Internet Angebote für die Entwicklung seiner digitalen Fotos. Die Firma FOTOFIX verlangt pro Foto 0,09 € und 6,95 € für Bearbeitung und Versand. PRETTYCOLOR verlangt 0,12 € pro Foto und 1,95 € für Bearbeitung und Versand. Die Firma DIGIPRINT wirbt mit einem Pauschalpreis von 14,99 € für 100 Fotos oder 26,99 € für 200 Fotos. Welchen Rat soll Hannah Felix geben?

____

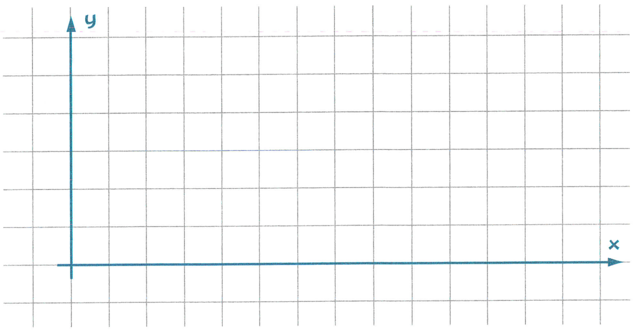
____

8 Eine zylinderförmige Regentonne ist 150 cm hoch. Sie wird bei gleichmäßigem Zulauf mit Wasser gefüllt.
a) Zeichnen Sie ein Schaubild für den Füllvorgang.
b) Bestimmen Sie eine lineare Funktion, die die Füllhöhe nach t Minuten angibt.



$f(t) =$ ____________________

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Füllhöhe zu Beginn des Füllvorgangs.



Bestimmen Sie, wann die Tonne voll ist.

c) Nach einiger Zeit wird die Regentonne über einen Hahn entleert. Überprüfen Sie, ob die Funktion $h(t) = 6t^2 - 60t + 150$ den Auslaufvorgang beschreiben könnte.
(h = Füllhöhe in cm, t = Zeit in Minuten)

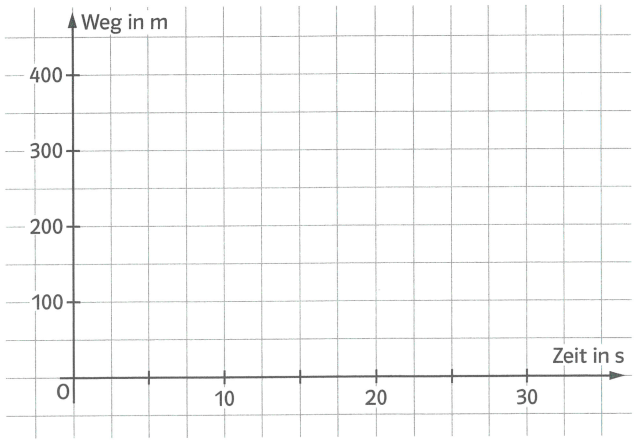
9 Peter hat mit dem Navi seines Vaters eine interessante Entdeckung gemacht. Er interessiert sich insbesondere für die Anfahrtsbewegung der Straßenbahn. Sein Navi liefert für die erste halbe Minute die folgenden Daten:

Fahrzeit t in Sekunden	0	5	10	15	20	25	30
Fahrweg s in Meter	0,0	13,6	53,6	124,1	222,6	343,5	482,2

Bei einer Parabel spricht man von einem quadratischen Zusammenhang zwischen x- und y-Wert.
Das bedeutet: Wenn man vom Scheitel aus den x-Wert verdoppelt, wird der y-Wert 4-mal so groß, wenn man den x-Wert verdreifacht, wird der y-Wert also 9-mal so groß.

Er überträgt die Daten in ein Weg-Zeit-Diagramm und verbindet die Punkte zu einer Kurve. Peter vermutet, dass es sich bei der gezeichneten Kurve um eine Parabel handelt. Um dies zu testen, zeichnet er in das Diagramm erst die Parabel mit der Gleichung $s = t^2$ und anschließend die Parabel mit $s = 0{,}5t^2$ ein.

Versuchen Sie eine Parabel zu zeichnen, die die gemessenen Werte noch besser beschreibt.
Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Werte in der Tabelle eine quadratische Funktion beschreiben.

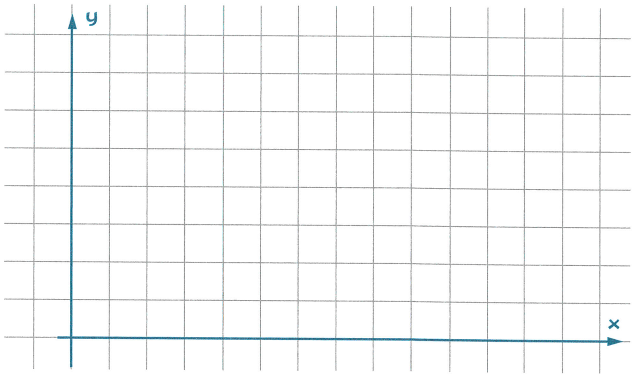


10 Ein Zug bremst bei der Einfahrt in den Bahnhof gleichmäßig ab, das heißt, seine Geschwindigkeit nimmt linear ab. Nach 5 Sekunden Bremsen fährt er noch mit 100 km/h, nach weiteren 15 Sekunden ist seine Geschwindigkeit nur noch 60 km/h.
Nach welcher Zeit steht der Zug?

____

____

____



11 Die Entfernung zwischen Urbach und Waiblingen beträgt 25 km. Mit dem Fahrrad kann man die Strecke auf dem Radweg in einer Stunde zurücklegen. Mit dem Auto benötigt man für dieselbe Strecke, bedingt durch das Verkehrsaufkommen, Ortsdurchfahrten, Verkehrsampeln und Staus, 30 Minuten. Um 7:00 Uhr fährt Axel mit dem Rad von Urbach nach Waiblingen. Um 7:20 Uhr folgt seine Freundin Carmen mit ihrem Auto.

a) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fährt Axel nach Waiblingen, mit welcher Carmen?

Axels Geschwindigkeit: ______________________

Carmens Geschwindigkeit: ______________________

b) Wann sind die beiden in Waiblingen?

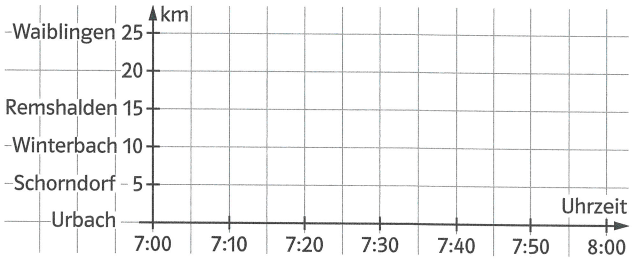
Axel: ______________ Carmen: ______________

c) Bestimmen Sie mit einem Weg-Zeit-Diagramm, wann und wo Axel von Carmen überholt wird.

____

____

____



d) Ebenfalls um 7:00 Uhr fährt Carmens Vater mit einem LKW mit 45 km/h von Waiblingen nach Urbach. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch, wann und wo sich der Lkw und der Pkw begegnen?

____

____

12 Bei der Brückenaufgabe 1 „Ein Gefäß läuft aus“ auf Seite 52 wurde ein Diagramm aufgenommen, das das Auslaufverhalten einer Flüssigkeit beschreibt. Peter behauptet, die Kurve im Diagramm von t = 0 bis t = 14 sei eine Parabel. Hat er recht?

____

____

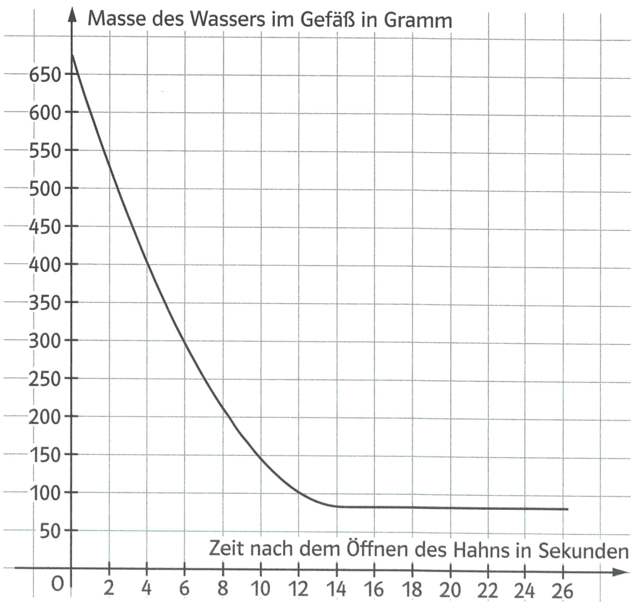
____

____

____

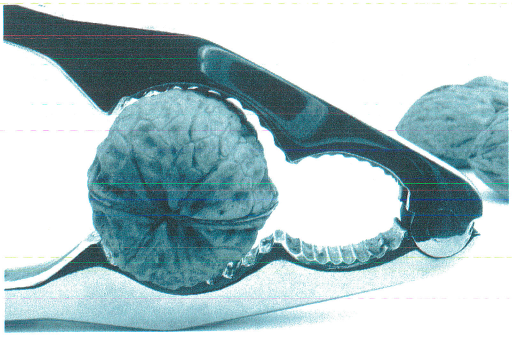
____

____



6 Problemlösen

In diesem Kapitel beschäftigen Sie sich mit Aufgaben, bei denen viele mathematischen Fähigkeiten und Kenntnisse gefragt sind. Oft gibt es nicht nur eine Lösung und damit auch nicht nur einen Lösungsweg – und oft werden Sie sich zunächst fragen, welches Werkzeug am besten geeignet ist, die Probleme zu lösen.
Es kann also gut sein, dass Ihr Lösungsweg nicht mit dem in einer Musterlösung oder einem Lösungstipp übereinstimmt. In diesem Fall sollten Sie Ihre Lösung nicht gleich verwerfen, sondern zuerst prüfen, ob Ihr Weg Sie zum Ziel geführt hat oder ob es ein Irrweg war.



Die vier Schritte des Problemlösens

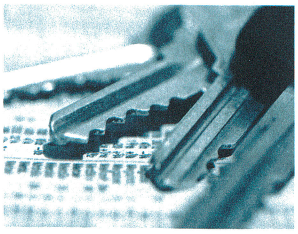
Die folgende Grafik gibt Ihnen einen Überblick über die vier Schritte, die immer dann zu tun sind, wenn man nicht genau weiß, wie man eine gestellte Aufgabe lösen soll. Diese Schritte werden Sie – nicht nur bei Mathematik-Aufgaben – Ihrem Ziel näher bringen.

Problemlösestrategien

Vorwärts arbeiten

Wenn Sie zum Beispiel eine wichtige Geheimzahl, z.B. Ihre Handy-PIN, vergessen haben, probieren Sie vielleicht systematisch verschiedene Nummern aus.
Sie überlegen, was Sie mit dem Gegebenen anfangen können. Sie versuchen, erst einmal nur einen Teil der Aufgabe zu lösen. Sie versuchen, das Problem zu vereinfachen. Sie überlegen sich Spezialfälle. Sie probieren mögliche Lösungen systematisch aus.

Rückwärts arbeiten



Wenn Sie zum Beispiel einen Schlüssel verlegt haben, sehen Sie vielleicht an allen Plätzen, an denen Sie waren, in umgekehrter Reihenfolge nach.
Sie überlegen, was Sie über die Lösung des Problems wissen, ob es vielleicht Spezialfälle gibt oder einige Fälle von vornherein ausgeschlossen sind. Möglicherweise haben Sie ein ähnliches Problem schon einmal gelöst und Sie können dieselbe Strategie anwenden.

Gezielt variieren

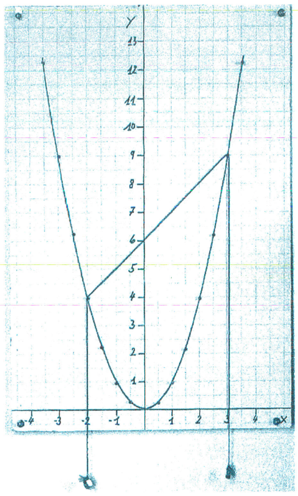
Wenn Sie zum Beispiel einen Ferienaufenthalt planen, erinnern Sie sich vielleicht an die Vorbereitungen vom letzten Jahr und gehen ähnlich vor.
Sie variieren das Gegebene, fügen Daten hinzu oder lassen einige weg. Sie überlegen, ob sich das Problem unter anderen Bedingungen lösen lässt oder ob es einen Spezialfall gibt. Vielleicht kennen Sie ein einfacheres analoges Problem oder eine weniger exakte Lösung.

Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Einführungsbeispiele	SE nach Bearbeitung des Kapitels
1. Ich kann eine Aufgabenstellung mit meinen eigenen Worten formulieren.			
2. Ich kann genau beschreiben, welche Daten und Größen in einer Aufgabe gegeben sind.			
3. Ich kann durch systematisches Probieren Lösungen eines Problems finden und ungeeignete Werte ausschließen.			
4. Ich kann überprüfen, ob die Lösung eines Problems allgemeingültig ist, indem ich mit Variablen und Termen anstelle von Zahlen rechne.			
5. Ich kann Skizzen, Schaubilder und Modelle zur Veranschaulichung eines Problems einsetzen und nutzen.			
6. Ich kann über die Lösung einer Aufgabe eine Vermutung aufstellen und überprüfen, ob die Lösung mit dieser Vermutung übereinstimmt.			

1 Parabel-Multiplikation

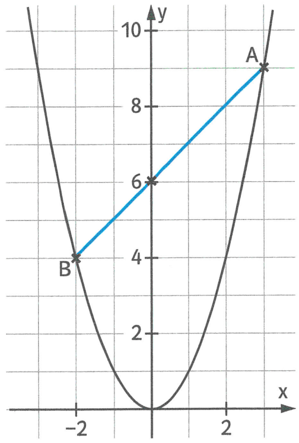
Mit einer Normalparabel kann man multiplizieren. Die Abbildung zeigt, wie das geht: Die beiden Zahlen, die miteinander multipliziert werden sollen, sind die Abstände der beiden Parabelpunkte von der y-Achse. Wenn man diese beiden Punkte durch eine Strecke verbindet, kann man das Ergebnis der Multiplikation einfach auf der y-Achse ablesen. Im Beispiel ist der erste x-Wert 3, der zweite x-Wert −2.
$3 \cdot 2 = 6$ entspricht dem y-Wert auf der Achse.



a) Warum ist das immer so?
b) Was ändert sich, wenn man statt der Normalparabel die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ verwendet?

Lösung von a)

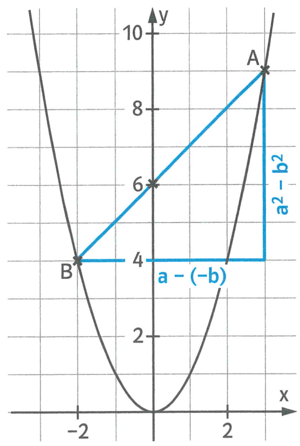
1. Das Problem verstehen
Aus den beiden Zahlen werden zwei Parabelpunkte, von denen einer rechts und der andere links von der y-Achse liegen muss. Die Gerade, die durch diese beiden Punkte geht, schneidet die y-Achse in einem dritten Punkt. Zu zeigen ist, dass der y-Wert dieses Punktes das Produkt der beiden Zahlen ist.



2. Eine Lösungsidee entwickeln
Wir können dieses Problem mit der Strategie „Vorwärts arbeiten" lösen. Für das obige Zahlenbeispiel berechnen wir die beiden Parabelpunkte A(3 | 9) und B(−2 | 4).
Die Steigung der Geraden durch A und B ist
$m = \frac{9-4}{3-(-2)} = 1.$
Um den y-Achsenabschnitt c zu bestimmen, setzen wir die Koordinaten von A in die Geradengleichung $y = 1 \cdot x + c$ ein und erhalten $c = 6$.
Nun verallgemeinern wir diese Berechnung: Wir ersetzen die beiden Zahlen durch Variablen, z. B. a und b. Die beiden Parabelpunkte haben dann die Koordinaten A(a | a^2) und B(−b | b^2).

3. Die Lösung erarbeiten
Aus dem Steigungsdreieck lesen wir die Steigung ab:
$$m = \frac{a^2 - b^2}{a-(-b)}$$
$$= \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a - b$$
Diese Steigung und die Koordinaten des Punktes A(a | a^2) setzen wir wieder in die Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ ein, um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen:
$a^2 = (a - b) \cdot a + c.$
Nach b aufgelöst erhält man $c = a \cdot b$.
Das Produkt $a \cdot b$ ist also der y-Achsenabschnitt der Geraden AB.

Hier brauchen Sie die **binomische Formel**
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

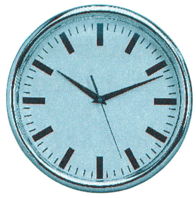


4. Die Lösung überprüfen
Die allgemeine Lösung bestätigt, dass die Parabelmultiplikation immer klappt.

Lösung von b)
Der Faktor $\frac{1}{2}$ bewirkt, dass die Parabel in y-Richtung gestaucht wird. Alle y-Werte sind nur noch halb so groß wie bei der Normalparabel. Dadurch wird auch die Verbindungsgerade gestaucht und ihr Schnittpunkt mit der y-Achse hat ebenfalls nur noch den halben y-Wert. Daher ist dies nicht mehr das Produkt der beiden Zahlen, sondern die Hälfte davon.

2 Minuten- und Stundenzeiger

Um 0:00 Uhr und um 12:00 Uhr stehen der Minuten- und der Stundenzeiger auf dem Ziffernblatt einer Uhr genau übereinander. Wie oft und zu welchen Uhrzeiten dazwischen geschieht dies außerdem?

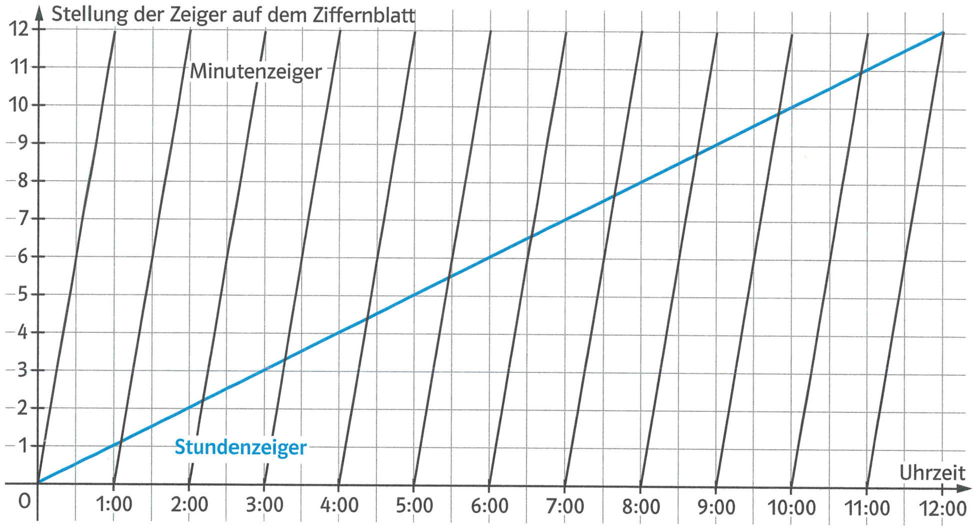


Zeichnerische Lösung

Wir wenden eine Rückwärts-Strategie des Problemlösens an und stellen die Position der Uhrzeiger in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar, um einen Überblick über sämtliche Zeigerstellungen zu bekommen. Immer wenn sich die Schaubilder schneiden, stehen die Zeiger genau übereinander.

Das Problem verstehen
Die Zeiger müssen zur selben Zeit am selben Ort sein.

Eine Lösungsidee entwickeln
Im Weg-Zeit-Diagramm kann man den Zusammenhang darstellen.
Aus den Schnittpunkten ergeben sich die Lösungen.



Es ist leicht zu erkennen, dass Stunden- und Minutenzeiger 10-mal zwischen 0 Uhr und 12 Uhr übereinander stehen. Man kann aus der Zeichnung ebenfalls erkennen, dass die 11 Zeitabschnitte zwischen 0 Uhr und 12 Uhr gleich groß sind, nämlich 12 Stunden : 11 = 1 Stunde 5 Minuten 27,3 Sekunden.
Die Zeiger stehen also übereinander um
01:05:27 Uhr, 02:10:55 Uhr, 03:16:22 Uhr, 04:21:49 Uhr, 05:27:16 Uhr, 06:32:44 Uhr, 07:38:11 Uhr, 08:43:38 Uhr, 09:49:05 Uhr und um 10:54:33 Uhr.

Problemlöseaufgaben kann man häufig unterschiedlich lösen. Hier sehen Sie drei Möglichkeiten. Entscheiden Sie selbst, welche Lösung Ihnen am besten einleuchtet.

Rechnerische Lösung 1

Die Bewegung der Zeiger wird durch Geraden beschrieben:

Stundenzeiger	$y = x$	für $0 \leqq x < 12$
Minutenzeiger	$y = 12x$	für $0 \leqq x < 1$
	$y = 12x - 12$	für $1 \leqq x < 2$
	$y = 12x - 24$	für $2 \leqq x < 3$ usw.

Berechnung der Schnittpunkte:

Aus $x = 12x$ folgt $x = 0$

Aus $x = 12x - 12$ folgt $x = \frac{12}{11}$

Aus $x = 12x - 24$ folgt $x = \frac{24}{11}$ usw. (siehe oben)

Die Lösung überprüfen
Die berechneten Zeiten stimmen mit den Schnittpunkten in der Grafik überein.

Rechnerische Lösung 2

Nach t Stunden hat der Minutenzeiger t Umdrehungen zurückgelegt.
Der Stundenzeiger hat nach t Stunden $\frac{t}{12}$ Umdrehungen zurückgelegt.
Beim ersten Aufeinandertreffen nach dem Start um 0 Uhr hat der Minutenzeiger eine Umdrehung, beim zweiten Aufeinandertreffen zwei Umdrehungen usw. mehr als der Stundenzeiger zurückgelegt.

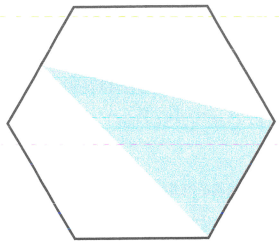
t ist eine beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 12.

Am 1. Treffpunkt gilt: $\frac{t}{12} = t - 1$, also $t = \frac{12}{11}$

Am 2. Treffpunkt gilt: $\frac{t}{12} = t - 2$, also $t = \frac{24}{11}$ usw. (siehe oben)

3 Der Pfeil im Sechseck

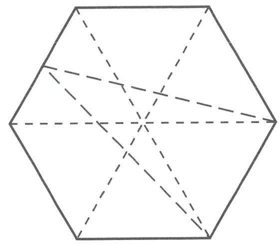
Welcher Bruchteil der Fläche des regelmäßigen Sechsecks wird von dem gefärbten Pfeil bedeckt?



Lösung

Die Aufgabe besteht darin, den Flächeninhalt des gefärbten Dreiecks zu berechnen und mit der Fläche des Sechsecks zu vergleichen.
Auch bei dieser Aufgabe sind mehrere verschiedene Lösungswege möglich.
Wir wenden die Strategie „Gezielt variieren" an und verwenden Zeichnungen als mathematisches Hilfsmittel. Sie können die Lösung aber z. B. auch durch ein Modell, das Sie aus Papier ausschneiden, finden.

1. Variation

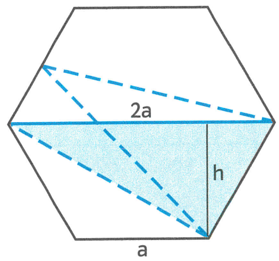


Wir zerlegen das Sechseck in 6 gleich große gleichseitige Dreiecke. Der Pfeil hat die doppelte Fläche eines dieser Dreiecke, weil seine Höhe doppelt so groß ist wie dessen Höhe. Deshalb gilt:

$A_{Pfeil} = 2 \cdot A_{Dreieck}$ und $A_{Sechseck} = 6 \cdot A_{Dreieck}$.

Also ist das Sechseck drei Mal so groß wie der Pfeil, der gesuchte Bruchteil ist $\frac{1}{3}$.

2. Variation



Der Flächeninhalt des Pfeils bleibt gleich, wenn man seine Spitze auf der Sechseckseite verschiebt, da sowohl die Grundseite als auch die Höhe gleich bleiben. Das gefärbte Dreieck hat also denselben Flächeninhalt wie der Pfeil.
Wir zerlegen das Sechseck in zwei gleich große Trapeze, deren längere parallele Seite doppelt so lang ist wie die Sechseckseite. Die längere parallele Trapezseite ist gleichzeitig die Grundseite des gefärbten Dreiecks, und die Höhe des Trapezes stimmt mit der Höhe des Dreiecks überein. Wir bezeichnen die Seite des Sechsecks mit a und die Höhe mit h. Für die Flächeninhalte gilt:

Ein **Trapez** hat den Flächeninhalt
$A = \frac{(a + c)}{2} \cdot h$
a, c: parallele Seiten,
h: Höhe

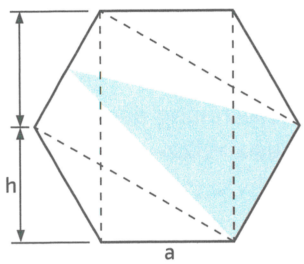
$$A_{Sechseck} = 2 \cdot A_{Trapez}$$
$$A_{Trapez} = \frac{a + 2a}{2} \cdot h = 1{,}5\,a \cdot h$$
$$A_{Dreieck} = \frac{2a \cdot h}{2} = a \cdot h$$

und damit ist

$$A_{Sechseck} = 3 \cdot a \cdot h = 3 \cdot A_{Dreieck}$$

Der gesuchte Bruchteil ist $\frac{1}{3}$.

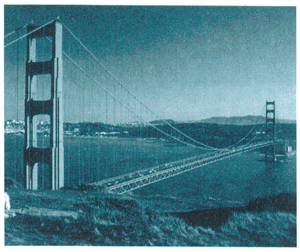
3. Variation



Wir zerlegen das Sechseck in ein Rechteck und zwei gleich große gleichschenklige Dreiecke. Der Flächeninhalt des Pfeils ist halb so groß wie der des Rechtecks. Der Flächeninhalt der gleichschenkligen Dreiecke ist jeweils $\frac{1}{4}$ der Rechtecksfläche, da der Dreiecksschenkel genau so lang ist wie die kürzere und die Dreieckshöhe auf diesem Schenkel halb so lang ist wie die längere Seite des Rechtecks.
Also gilt

$$A_{Sechseck} = A_{Rechteck} + 2 \cdot A_{Dreieck} = 1{,}5 \cdot A_{Rechteck} = 3 \cdot A_{Pfeil}$$

Der gesuchte Bruchteil ist $\frac{1}{3}$.



1 Summe dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen

Ihre Freundin Nina behauptet, dass die Summe dreier ganzer Zahlen, die aufeinander folgen, immer durch drei teilbar sei. Ist das wirklich immer so?

Beispiel 1: ______________________________

Beispiel 2: ______________________________

Beispiel 3: ______________________________

Zwischenschritt
Überprüfen Sie die Behauptung an einigen konkreten Beispielen.

Wie Sie wissen, genügen Beispiele nicht als Beweis, egal mit wie vielen Sie die Behauptung bestätigen. (Siehe Einführungsbeispiel 3 zum Kapitel Argumentieren und Interpretieren auf Seite 72.)

Grafischer Ansatz

Zwischenschritt
Versuchen Sie, das Problem grafisch oder anhand eines Modells zu veranschaulichen, zum Beispiel mit Klötzchen, aus denen drei Türme gebaut sind, die den drei Zahlen entsprechen

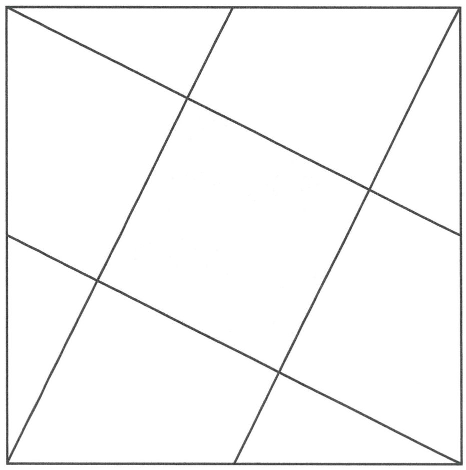
Algebraischer Ansatz

$\boxed{}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{}$

Zwischenschritte
Versuchen Sie, das Problem algebraisch zu beschreiben, indem Sie zum Beispiel die mittlere der drei Zahlen mit der Variablen x bezeichnen. Welche Terme beschreiben dann die beiden anderen Zahlen?
Woran erkennt man, dass die Summe durch drei teilbar ist? Berechnen Sie die Summe der drei Zahlen.

2 Quadrat im Quadrat

Das Muster entsteht, wenn in einem Quadrat jeder Eckpunkt mit einer Seitenmitte verbunden wird. Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt das graue Quadrat im Innern ein?



____

____

____

____

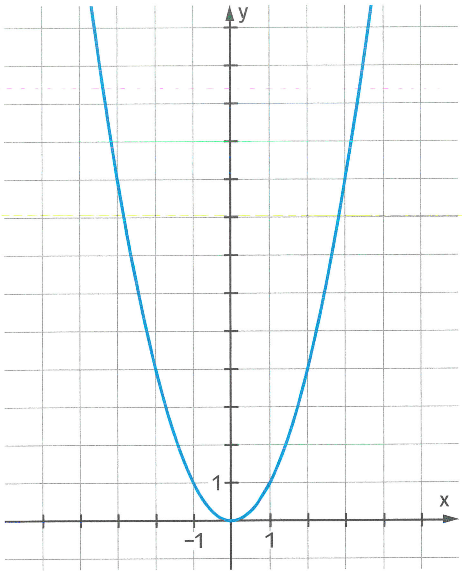
____

Zwischenschritte
Grafisch:
Übertragen Sie die Figur auf ein Blatt Papier, schneiden Sie die Dreiecke aus und legen Sie diese geschickt an die Restfigur an.

Algebraisch:
Suchen Sie in der Figur mithilfe der Strahlensätze möglichst viele gleich lange Seiten, sodass Sie die Seitenlänge des grauen Quadrates mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen können.

3 Parabelsekanten

Eine beliebige Gerade g schneidet die Normalparabel. Man bestimmt die Schnittpunkte A und B sowie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.
Macht man dies nun mit weiteren Geraden, die parallel zu g sind, dann liegen alle Mittelpunkte auf einer Geraden. Beschreiben Sie die Lage dieser Geraden.



Zwischenschritte
Zeichnen Sie einige parallele Geraden in das Koordinatensystem.
Bestimmen Sie zeichnerisch die Punkte A, B und M jeder dieser Geraden.
Verbinden Sie die Mittelpunkte.
Formulieren Sie eine Vermutung.

____

____

____

____

____

____

Berechnen Sie die Punkte A, B und M für die Gerade g mit der Gleichung
$y = \frac{1}{2}x + 3$.

A(___ | ___), B(___ | ___), M(___ | ___)

Für den **Mittelpunkt** einer Strecke $\overline{AB}$ berechnet man die arithmetischen Mittelwerte der Koordinaten von A und B.

Arithmetisches Mittel nennt man den üblichen Mittelwert: Man addiert alle Einzelwerte und teilt die Summe durch deren Anzahl.

Parallele Geraden haben dieselbe Steigung.

Wiederholen Sie diese Berechnung für mindestens zwei Geraden, die zu g parallel sind.

1. Gerade y = ______________________________

A_1(___ | ___), B_1(___ | ___), M_1(___ | ___)

2. Gerade y = ______________________________

A_2(___ | ___), B_2(___ | ___), M_2(___ | ___)

Vermutung: ______________________________

____

Berechnen Sie die Punkte A, B und M für die Gerade mit der Gleichung
$y = \frac{1}{2}x + b$.

Die Gleichung
$y = \frac{1}{2}x + b$
beschreibt allgemein eine Parallele zu g.

____

A(___ | ___), B(___ | ___), M(___ | ___)

Ergebnis: ______________________________

____

____

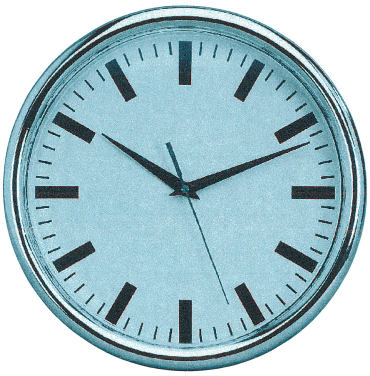
Mit den folgenden Aufgaben können Sie Ihre Fähigkeiten zum Problemlösen vertiefen. Viele dieser Aufgaben ähneln den Musterbeispielen und den Brückenaufgaben. Daher können Sie sich an den dortigen Lösungen und Tipps orientieren, wenn Sie nicht wissen, wie Sie bei der Lösung der Aufgaben vorgehen sollen.

1 Wie man mit der Normalparabel multipliziert, wird im Einführungsbeispiel auf Seite 62 beschrieben.
Formulieren Sie eine Regel, wie man die Normalparabel zum Dividieren verwenden kann.

Regel: ______________________

2 Gilt die Regel für die Parabelmultiplikation auch, wenn beide Punkte auf derselben Seite der Parabel liegen?

3 Wie oft stehen Minuten- und Sekundenzeiger auf dem Ziffernblatt einer Uhr zwischen 10:00 Uhr und 11:00 Uhr übereinander?
Zu welchen Uhrzeiten geschieht dies?

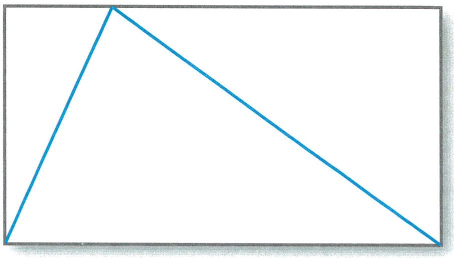


4 Carola: „Das hab ich jetzt kapiert: Die Summe dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist also immer die mittlere der drei Zahlen, mit 3 multipliziert.
Gibt es eine solche Regel auch für vier oder fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen?"

Für vier Zahlen: ______________________

Für fünf Zahlen: ______________________

5 Auf einem rechteckigen Blatt Papier wird ein Streckenzug gezeichnet, der die Eckpunkte der einen Seite mit einem beliebigen Punkt der gegenüberliegenden Seite verbindet.
Gibt es unter den möglichen Streckenzügen einen kürzesten? Wenn ja, welcher Streckenzug ist dies? Können Sie das begründen?

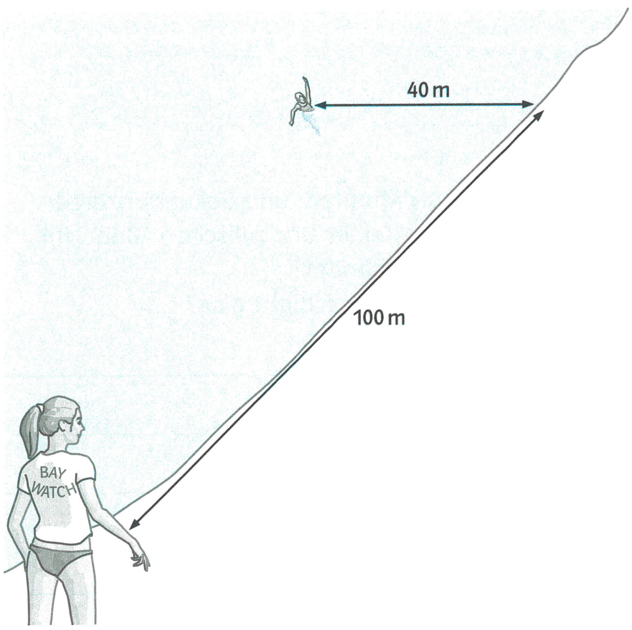


6 Können Sie mit den Angaben aus dem Taschenbuch Papiertechnologie die Maße des Formats DIN A4 bestimmen?

„… Schreib- und Druckpapiere werden größtenteils nach den vom Normen-Ausschuss der deutschen Industrie in Zusammenarbeit mit dem Normen-Ausschuss für das grafische Gewerbe im Jahre 1920 geschaffenen DIN-Formaten hergestellt.
Bei der Schaffung der Normformate ging man von folgender Überlegung aus:
1. Die einzelnen Größen aller DIN-Formate müssen durch Halbieren auseinander hervorgehen und einander ähnlich sein. Dies erreicht man, indem die Seiten eines DIN-Formatbogens sich wie die Seiten eines Quadrates zu dessen Diagonale verhalten.
2. … Die Fläche der „Urnorm" DIN A0 beträgt einen Quadratmeter …"

Auszug aus dem Taschenbuch Papiertechnologie

7 Die Baywatch-Rettungsschwimmerin Nina sieht im Wasser einen Schwimmer, der um Hilfe ruft. Nina kann am Strand mit einer Geschwindigkeit von $6\,\frac{m}{s}$ rennen und im Wasser mit $1{,}3\,\frac{m}{s}$ schwimmen.
Bestimmen Sie für einige mögliche Wege die Zeit, die Nina braucht, um den Schwimmer zu erreichen. Versuchen Sie, einen möglichst guten Weg für Nina zu ermitteln.

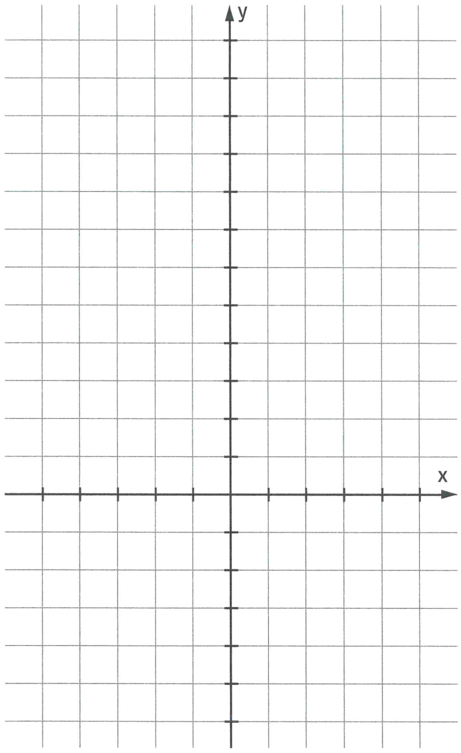


8 Am Wochenende kommen bei einem Eintritt von 10 € durchschnittlich 300 Gäste in eine Diskothek. Die Geschäftsleitung vermutet, dass sich die Gästezahl verringert, wenn der Eintritt erhöht wird, und zwar um jeweils 15 Gäste bei jedem Euro mehr.
Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen der Diskothek am größten?

9 Achim will sich einen neuen Laptop kaufen. Die Firma LAP bietet ihm einen sehr guten Preis, zudem soll er bei Barzahlung 5 % Skonto und dann noch einen zusätzlichen Rabatt von 15 % erhalten.
Der Verkäufer der Firma TOP bietet ihm denselben Preis. Außerdem, so fügt er hinzu, müsse Achim bei ihnen einen geringeren Endpreis bezahlen, weil sie zuerst den Rabatt mit 15 % und dann erst das Skonto mit 5 % berechneten.

10 a) Eine Gerade schneidet die Normalparabel in zwei Punkten A und B. Zeigen Sie, dass die Steigung dieser Geraden genau so groß ist wie die Summe der x-Werte von A und B.

b) Durch einen weiteren Punkt P auf der Normalparabel und den Punkt auf der x-Achse, dessen x-Wert halb so groß ist wie der von P, wird eine Gerade gelegt. Begründen Sie, dass diese Gerade die Parabel berührt.



Machen Sie sich eine Skizze. Sie ist ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel, wenn es um Graphen geht.

Man sagt, dass eine Gerade eine Parabel berührt, wenn sie nur einen gemeinsamen Punkt haben.

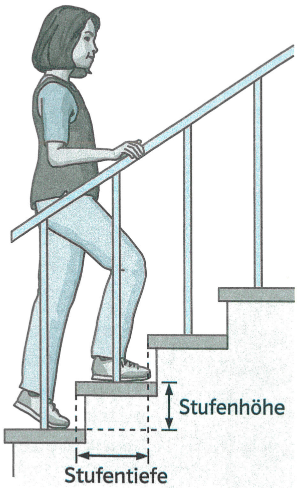
11 Eine Treppe ist umso bequemer und sicherer, je flacher sie ansteigt. Der Steigungswinkel einer bequemen Treppe liegt zwischen 22° und 45°. Beim Treppenbau rechnet man mit einem „Schrittmaß" zwischen 59 und 65 cm und verwendet dafür die Formel

Schrittmaß = 2 · Stufenhöhe + Stufentiefe

Nach dieser Regel ergibt sich für jede Treppe, die eine gegebene Höhe erreichen soll, ein Zusammenhang zwischen der Stufenzahl und dem Steigungswinkel der Treppe.

Ergänzen Sie für eine Treppe, die 2,80 m hoch sein soll, die Tabelle, die den Zusammenhang zwischen dem Schrittmaß und der Stufenzahl angibt:

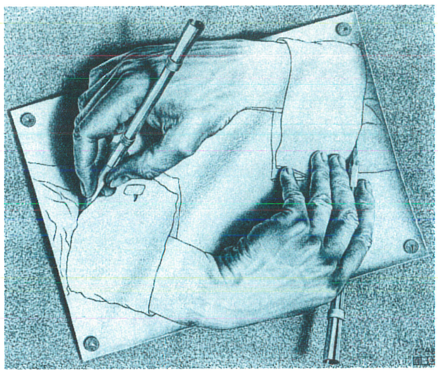
Schrittmaß	59	60	61	62	63	64	65
kleinste Stufenzahl							
größte Stufenzahl							

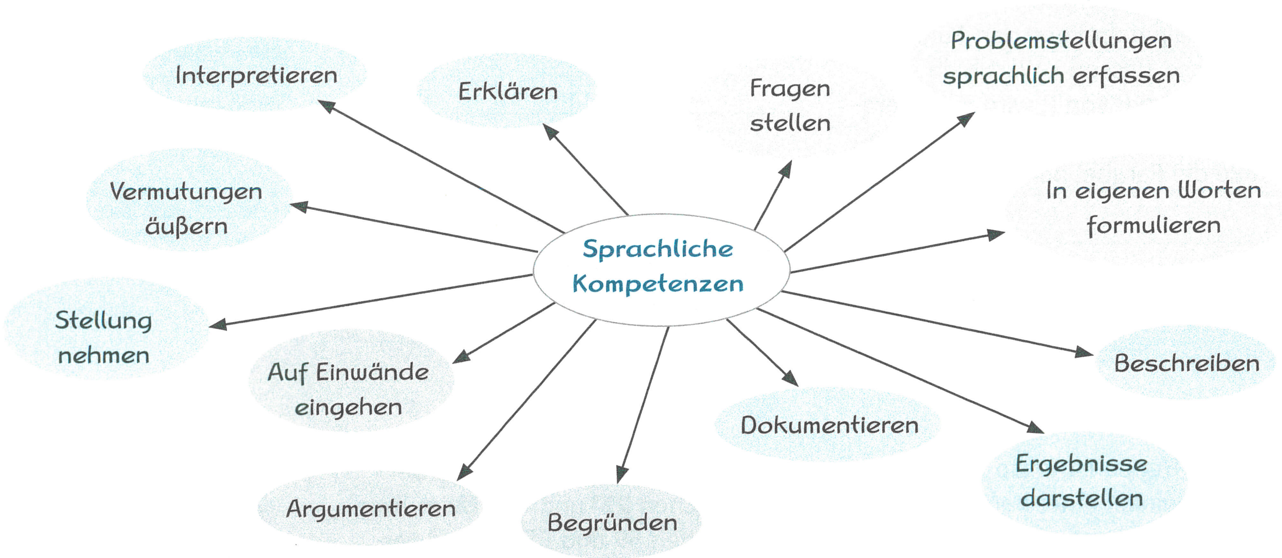


12 Pedro kauft sich auf dem Wochenmarkt eine Gurke mit 1 kg Masse, die zu 99 % aus Wasser besteht. Da ihm der Heimweg in der Mittagshitze zu anstrengend ist, beschließt er, zunächst einmal Siesta zu machen, und legt sich unter einen Baum, die Gurke neben sich. Als er wieder aufwacht, liegt die Gurke schon geraume Zeit in der prallen Sonne. Sie besteht nun nur noch zu 98 % aus Wasser. Wie viel wiegt die Gurke jetzt? Schätzen Sie zuerst, bevor Sie rechnen!

7 Interpretieren und Argumentieren

In diesem Kapitel beschäftigen Sie sich mit Aufgaben, bei denen es darum geht, sprachliche Fähigkeiten zu üben. Die Grafik gibt Ihnen einen Überblick, um welche Fähigkeiten es sich dabei handelt, und diese Übersicht könnte noch durch viele weitere Begriffe ergänzt werden. Die Aufgaben zu diesem Kapitel stammen überwiegend aus dem Bereich der Algebra – jedoch geht es dabei weniger darum zu rechnen, sondern überwiegend darum, Lösungen und Lösungswege in Worten zu formulieren.



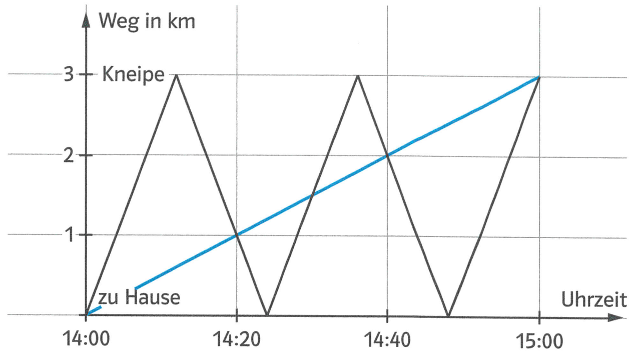


Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Einführungsbeispiele	SE nach Bearbeitung des Kapitels
1. Ich kann Informationen, die in Texten, Tabellen oder Diagrammen dargestellt sind, zusammenfassen und mit eigenen Worten wiedergeben.			
2. Ich kann ein Schaubild, das einen zeitlichen Ablauf darstellt, interpretieren.			
3. Ich kann eine Aussage mithilfe von Beispielen überprüfen.			
4. Ich kann eine wahre Aussage durch eine verallgemeinerte Argumentation begründen.			
5. Ich kann eine falsche Aussage durch ein Gegenbeispiel widerlegen.			
6. Ich kann zu einer Aussage eine Gegenaussage formulieren.			
7. Ich kann Informationen aus einem umgangssprachlichen Text in mathematische Fachsprache übersetzen.			

1 Herr und Hund

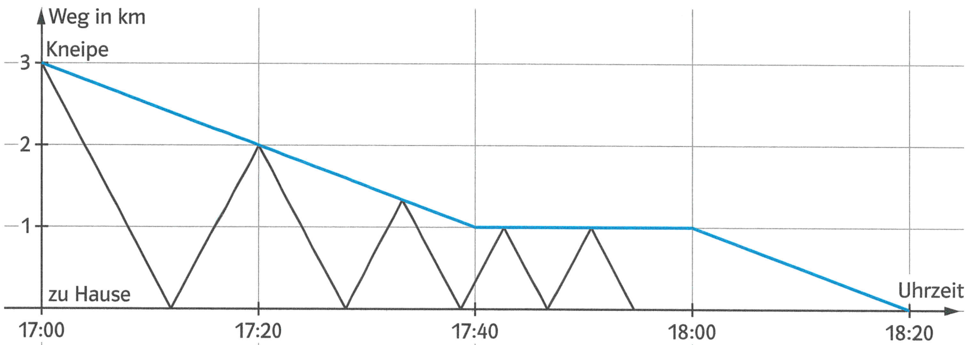
a) Herr Jäger macht mit seinem Hund Kuno täglich einen Nachmittagsspaziergang von zuhause zu seiner 3 km entfernten Lieblingskneipe. Das Diagramm zeigt die Laufwege von Herr und Hund.
Beschreiben Sie diesen Spaziergang in Worten.



Lösung
Aus dem Diagramm kann man die Start- und die Ankunftszeit ablesen, ebenso die Geschwindigkeit 3 km/h (offensichtlich die von Herrn Jäger) und die Geschwindigkeit 15 km/h (offensichtlich die von Kuno).
Herr Jäger bricht um 14 Uhr zusammen mit seinem Hund Kuno zuhause zu seinem Nachmittagsspaziergang auf. Er wandert gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h. Hund Kuno rennt voraus zur Kneipe, dreht dort um und rennt wieder nach Hause. Dort dreht er sofort wieder um, rennt nochmals zur Kneipe, wieder nach Hause und nochmals zur Kneipe, wo er gleichzeitig mit Herrn Jäger um 15 Uhr ankommt. Auf ihrem Weg treffen sich die beiden drei Mal, nämlich um 14:20 Uhr, um 14:30 Uhr und um 14:40 Uhr.

Unter **Interpretieren** versteht man in der Mathematik die inhaltliche Erklärung oder Deutung einer grafischen, symbolischen oder sprachlichen Darstellung eines Sachverhalts unter Zuhilfenahme von mathematischen Methoden und Hilfsmitteln.

b) Das Diagramm unten beschreibt den Rückweg von Herrn Jäger und Kuno. Interpretieren Sie das Diagramm mithilfe einer Geschichte. Lesen Sie aus dem Diagramm ab, welche Strecke Kuno auf dem Hinweg, welche er auf dem Rückweg zurückgelegt hat.



Lösung
Aus dem Diagramm kann man die Start- und die Ankunftszeit ablesen, ebenso die Geschwindigkeiten 3 km/h und 15 km/h.
Herr Jäger macht sich zusammen mit Kuno um 17 Uhr auf den Rückweg. Kuno rennt ihm wieder voraus, dreht zuhause um und trifft Herrn Jäger, der inzwischen 1 km zurückgelegt hat. Dieses Spiel wiederholt er immer wieder. Herr Jäger macht nach 40 Minuten, 1 km bevor er zuhause ist, 20 Minuten lang eine Rast. Er ist um 18:20 Uhr zuhause, wo Kuno schon auf ihn wartet. Dieser hat das Hin- und Herrennen aufgegeben, als er zum fünften Mal zuhause ankam.
Auf dem Hinweg hat Kuno $5 \cdot 3\,\text{km} = 15\,\text{km}$ zurückgelegt,
auf dem Rückweg etwa $3\,\text{km} + 2 \cdot 2\,\text{km} + 2 \cdot 1{,}3\,\text{km} + 4 \cdot 1\,\text{km} = 13{,}6\,\text{km}$.

2 Teilen durch 8

Lisa behauptet: „Wenn man eine ungerade Quadratzahl durch 8 teilt, bleibt immer der Rest 1." Hat Lisa Recht? Begründen Sie Ihre Feststellung.

Beim **Argumentieren** erkennt man eine Gesetzmäßigkeit und verwendet allgemeingültige Begründungen, um diese zu bestätigen.
Bei dieser Aufgabe brauchen Sie Argumente, dass eine Aussage **immer richtig** ist.

Lösung

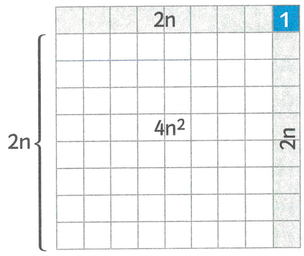
Beispiele:

$1^2 = 1 = 0 \cdot 8 + 1$ $\quad$ $3^2 = 9 = 1 \cdot 8 + 1$ $\quad$ $5^2 = 25 = 3 \cdot 8 + 1$

Allgemeine Darstellung:

Eine beliebige gerade Zahl kann man durch $a = 2n$ ausdrücken, eine beliebige ungerade Zahl durch $b = 2n + 1$.

Das Quadrat der beliebigen ungeraden Zahl b ist also
$b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.
Die Grafik macht die drei Summanden $4n^2$, $4n = 2n + 2n$ und 1 deutlich.
Der Term $4n^2 + 4n + 1$ ist zusammengesetzt aus $4n^2 + 4n$ und dem Rest 1.
Man faktorisiert $4n^2 + 4n = 4n \cdot (n + 1)$. Einer der beiden Faktoren n oder $(n + 1)$ ist eine gerade Zahl, also ist $4n \cdot (n + 1)$ durch 8 teilbar.



Beim Argumentieren beginnt man häufig mit einigen Beispielen. Bei der folgenden Aufgabe können Sie erkennen, dass das nicht genügt, um ganz sicher zu sein. Man braucht Argumente, die diese ersten Schritte verallgemeinern, oder ein Gegenbeispiel, das die scheinbare Gesetzmäßigkeit widerlegt.

3 Eine besondere Zahl

Hugo will seinen kleinen Bruder beeindrucken und erzählt ihm, er habe eine tolle Zahl gefunden, die demnächst nach ihm benannt werde. Die Hugo-Zahl 5040 sei nämlich durch jede ganze Zahl ohne Rest teilbar. Hugo rechnet vor:
„Dass 5040 durch 1 und 2 ohne Rest teilbar ist, ist ja klar! 5040 geteilt durch 3 ist 1680 ohne Rest, und 5040 durch 4 ergibt auch keinen Rest. Wegen der 0 hinten ist 5040 eine Fünferzahl, und 5040 durch 6 ergibt 840 – ohne Rest.
Ebenso ist 5040 durch 7, durch 8, durch 9 und durch 10 teilbar. Nach diesen 10 Beispielen können wir wohl größere Schritte machen: 5040 geteilt durch 12 ist 420, 5040 durch 14 ist 360 und 5040 durch 15 ergibt auch keinen Rest.
Das waren 13 Beispiele. Jetzt glaubst du mir sicher, dass 5040 durch alle natürlichen Zahlen ohne Rest teilbar ist. Oder?"

Auch mit vielen **Beispielen** kann man keine allgemeine Behauptung begründen.
Aber:
Ein einziges **Gegenbeispiel** genügt, um eine Behauptung zu Fall zu bringen.

Lösung

Schon die übersprungene 11 widerlegt Hugo: 5040 ist nicht durch 11 teilbar, ebenso natürlich jede Zahl, die größer als 5040 ist.

Eine Aussage ist richtig, wenn ihr Gegenteil falsch ist. Dieser einfache logische Zusammenhang wird in der Mathematik häufig angewendet. Aber es ist nicht immer einfach, eine Gegenaussage zu formulieren.

4 Gegenaussagen

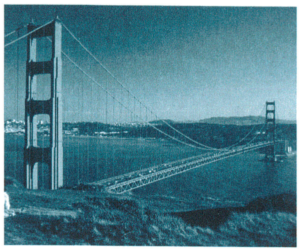
Contrala, die Tochter des Mathematiklehrers Prolo, neigt dazu, ihrem Vater zu widersprechen. Neulich beim Abendessen entspann sich folgender Dialog. Was hat Contrala geantwortet?

Vater: „Du hast schon mehr als 50 Euro von mir bekommen."
Vater: „Ich habe noch 20 Euro in meiner Tasche."
Vater: „In der letzten Woche warst du höchstens zwei Mal abends zuhause."
Vater: „Gestern hast du mehr als 2 Stunden mit deiner Freundin telefoniert."
Vater: „Du machst nie die Hausaufgaben."
Vater: „Du kommst immer zu spät."

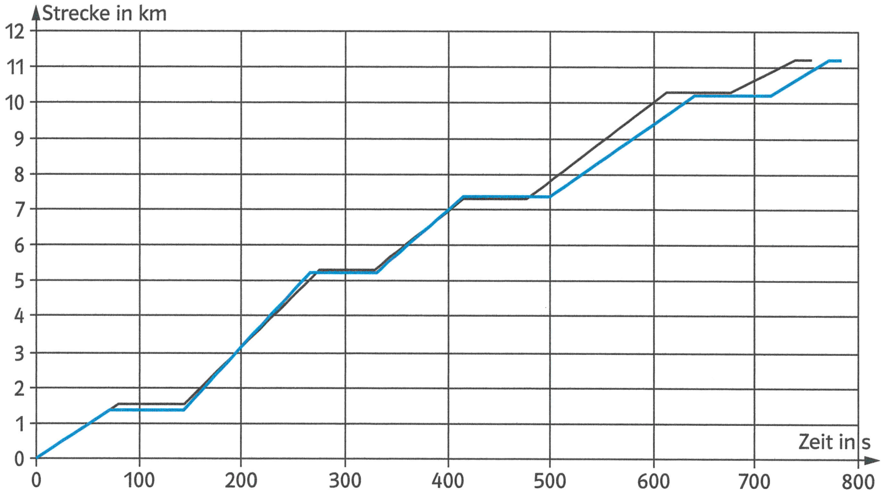
Lösung

Contrala: „nemmokeb rid nov oruE 05 snetshcöh ebah hcI."
Contrala: „oruE 02 sla rhem redo reginew tsah uD."
Contrala: „esuahuz sdneba laM iewz sla rhem ehcoW etztel raw hcI."
Contrala: „treinofelet nidnuerF reniem tim nednutS 2 snetshcöh hci ebah nretseG."
Contrala: „thcameg nebagfuasuaH eid lamnie nohcs snetsednim ebah hcI."
Contrala: „hciltknüp lamnie snetsednim raw hcI."

1 Mit dem Navi in der S-Bahn



Peters Vater hat ein neues Navi. Peter hat entdeckt, dass dieses Navi die Position im Sekundentakt speichert, sodass man daraus ein Weg-Zeit-Diagramm der Fahrt erstellen kann. Peter fährt mit der S-Bahn zur Schule, zeichnet die Fahrt auf und erhält die blaue Kurve.



a) Beschreiben Sie die S-Bahn-Fahrt.

Zwischenschritte
Wie lang ist die gesamte Fahrstrecke?
Wie lange dauert die Fahrt?
Was bedeuten die waagrechten Abschnitte im Diagramm?
Wie viele Haltestellen gibt es zwischen Start- und Zielhaltestelle?
Wie lange hält die S-Bahn maximal?

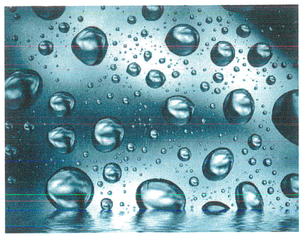
b) Zwischen welchen Stationen hat die S-Bahn die höchste Geschwindigkeit? Wie groß ist diese Geschwindigkeit ungefähr?

Lesen Sie aus dem Diagramm die Strecke und die Fahrzeit zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Haltestellen ab. Berechnen Sie daraus die mittlere Geschwindigkeit zwischen diesen Haltestellen.

c) Peter zeichnet in den nächsten Tagen noch weitere Fahrten auf. Er erhält auch die schwarze Kurve im Diagramm oben. Er vermutet, dass er diese Kurve ebenfalls auf dem Schulweg in derselben S-Bahn-Linie aufgenommen hat.
Wie könnte er argumentieren?

Bestimmen Sie für beide Fahrten die Strecken zwischen den Haltestellen.

2 Regenwetter am Bodensee



Lisa sitzt frustriert an ihrem PC und schaut zum Fenster hinaus. Draußen regnet es mal wieder in Strömen – und das schon seit Tagen. Allmählich kommt sie zu der Überzeugung, dass sie einen solch regnerischen Juli noch nie erlebt hat. Aber sie will es genau wissen und recherchiert im Internet. Dabei findet sie bei Wetteronline folgende Tabelle:

Klimarechner: Konstanz
Monatsanalyse
Tage mit Niederschlag > 0,1 mm im Juli

1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	Jahr
11,0	18,0	19,0	10,0	10,0	16,0	15,0	16,0	15,0	22,0	Tage
2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	Jahr
10,0	17,0	15,0	20,0	18,0	9,0	21,0	15,0	16,0	18,0	Tage

Gemittelter Wert im Juli (1990 – 2010): 15,3 Tage

Diese und noch mehr Daten über das Wetter finden Sie im Internet.

Fassen Sie die wichtigsten Informationen dieser Tabelle in einem kurzen Bericht zusammen.

Mögliche Fragestellungen
Was ist das Thema der Tabelle? Über welche Größen gibt sie Auskunft?
Welche Maßeinheiten werden verwendet?
Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten, z. B. die Spannweiten der Größen, Mittelwerte und erkennbare Trends.
Gehen Sie auf Besonderheiten wie Maximum, Minimum, Lücken und Häufungen in der Tabelle ein.
Fallen Ihnen zu den besonders trockenen oder nassen Jahren weitere Fakten ein?
Welche Schlussfolgerungen oder Anwendungen können Sie aus den gegebenen Informationen ziehen?
Welche Informationen vermissen Sie, die zum selben Thema gehören?

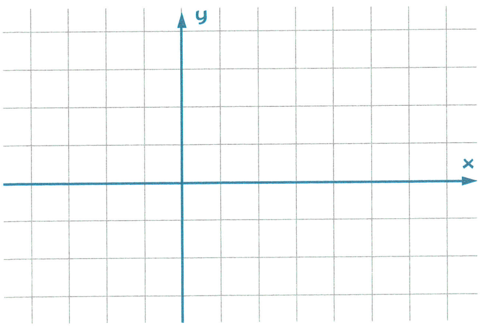
Tipps
Zuerst der Überblick, erst dann die Details!

Zuerst Entwicklungen und Trends, erst dann die Ausreißer!

Aussagekräftige Zusammenfassungen und Grafiken dienen dem Verständnis.

3 Nehmen Sie Stellung zu folgenden Aussagen:

(A) „Die Gleichung $2x + 14 = 5x - 16$ hat die Lösungsmenge $\{10\}$."
(B) „Die Gleichung $2x + 14 = 5x - 16$ hat die Lösung $x = 10$."
(C) „Die Gleichung $x^2 - 5x - 50 = 0$ hat die Lösungsmenge $\{10\}$."
(D) „Die Gleichung $x^2 - 5x - 50 = 0$ hat die Lösung $x = 10$."
Erkläre die Unterschiede mithilfe einer Skizze.



Tipps
Überprüfen Sie die angegebene Lösung.

Lösen Sie die beiden Gleichungen.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Aussagen.

Zeichnen Sie die Geraden bzw. die Parabel, die den Termen in den Gleichungen entsprechen, in das Diagramm ein.

Lösen Sie die Gleichungen grafisch.

4 Summe eins

Betrachten Sie zwei beliebige Zahlen, deren Summe 1 ist. Sie quadrieren die größere und addieren die kleinere. Danach quadrieren Sie die kleinere und addieren die größere. Bei welchem Rechenvorgang ist das Ergebnis größer? Stellen Sie eine Vermutung auf, bevor Sie anfangen zu rechnen.

Erstes Beispiel ____________________

Zweites Beispiel ____________________

Gesetzmäßigkeit in Worten ____________________

Gleichung als Term ____________________

1. Rechenvorgang in Worten ____________________

1. Term ____________________

2. Rechenvorgang in Worten ____________________

2. Term ____________________

Beginnen Sie mit einigen Beispielen. Erkennen Sie Gesetzmäßigkeiten? Die Beispiele reichen jedoch nicht, um ganz sicher zu sein. Sie brauchen eine allgemeingültige Argumentation.

Zwischenschritte
Setzen Sie für die Zahlen Variablen ein. Beschreiben Sie die Beziehung zwischen beiden Zahlen als Gleichung. Übersetzen Sie die Rechenvorgänge in Terme. Formen Sie die Terme mithilfe der Gleichung um, sodass nur noch eine Variable vorkommt. Vergleichen Sie die beiden Terme.

Bei den folgenden Aufgaben trainieren Sie, wie man die mathematisch-symbolische Schreibweise in die „normale" Sprache übersetzen kann, und umgekehrt.

5 Welche der folgenden Aussagen treffen für Punkte auf der Parabel K zu?

Für $x = 3$ ist $y < 1$ ____________

Für $y < 1$ ist $x = 3$ ____________

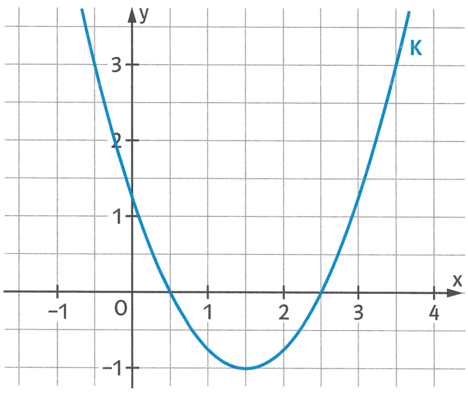
$y \geqq -1$ für alle x ____________

$y > 1$ für $x < 0$ ____________

$A(1{,}5\,|\,3) \in K$ ____________

$y \leqq 0$ für $0{,}5 \leqq x \leqq 2{,}5$ ____________

Für $x > 1$ ist $y < 0$ ____________



Übersetzungen

Für $x = 3$ ist $y < 1$ ____________________

Für $y < 1$ ist $x = 3$ ____________________

$y \geqq -1$ für alle x ____________________

$y > 1$ für $x < 0$ ____________________

$A(1{,}5\,|\,3) \in K$ ____________________

$y \leqq 0$ für $0{,}5 \leqq x \leqq 2{,}5$ ____________________

Für $x > 1$ ist $y < 0$ ____________________

Bedeutung der Symbole
- $<$ kleiner als
- $>$ größer als
- $\leqq$ kleiner oder gleich
- $\geqq$ größer oder gleich
- $\in$ ist Element von, gehört zu, liegt auf

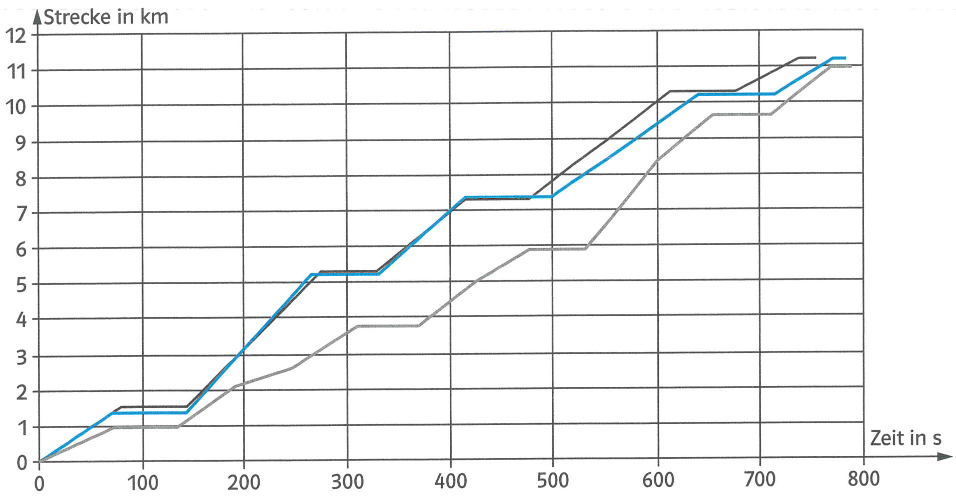
Zwischenschritte
Übersetzen Sie die Aussagen in Symbolsprache zunächst mit den Übersetzungshilfen in „normale" Sprache. Entscheiden Sie danach, ob die Aussage zutrifft.

Für Punkte im gewöhnlichen Koordinatensystem gibt es folgende **Übersetzungshilfen**:

$x < 1$:	links von $x = 1$
$x > 0$:	rechts von $x = 0$
$y < 1$:	unterhalb $y = 1$
$y > 0$:	oberhalb $y = 0$
$0 \leqq x \leqq 1$:	zwischen 0 und 1

Mit den folgenden Aufgaben können Sie Ihre Fähigkeiten zu Interpretieren und zu Argumentieren vertiefen. Einige davon sind ähnlich wie die Einführungsbeispiele und die Brückenaufgaben. Die dortigen Lösungen und Tipps helfen Ihnen beim Lösen der Übungsaufgaben.

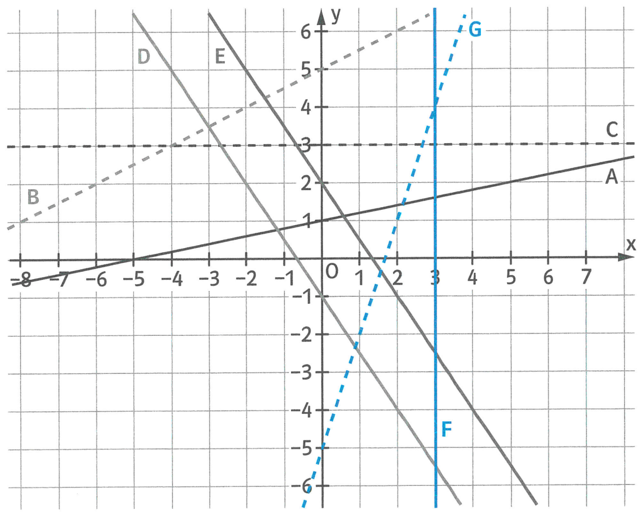
1 Peter nimmt mit seinem Navi noch weitere Fahrten auf. Zu den beiden bereits bekannten Kurven, die von seinem Schulweg mit der S-Bahn stammen, ist noch eine weitere (grau) hinzugekommen. Er vermutet, dass auch diese Kurve auf dem Schulweg mit derselben S-Bahn-Linie aufgenommen wurde. Begründen Sie diese Vermutung.



Die blaue und schwarze Kurve stammen von Peters ersten beiden Fahrten (Seite 73).

2 Im nebenstehenden Schaubild sind die Geraden A, B, C, D, E, F und G gezeichnet. Für welche der Geraden treffen die folgenden Aussagen zu?
(„Für keine" oder „für alle" sind auch möglich.)

Die Aussage	trifft zu für
Für $x = 3$ ist $y = 4$	
Für $x > 4$ ist $y < 2$	
Die Steigung ist $m = -1{,}5$	
Die Geradengleichung ist $x = 3$	
Die Geradengleichung ist $y = 2x + c$	
Aus $2 < y < 4$ folgt $-2 < x < 1$	



3 Nehmen Sie Stellung zu dieser Pressenotiz.

„Wie Sie alle wissen, musste unser Unternehmen im vorigen Jahr eine Umsatzeinbuße von 20 % hinnehmen. Mit vereinten Anstrengungen werden wir in diesem Jahr den Umsatz wieder um 20 % steigern, sodass wir uns wieder auf dem alten Niveau befinden".

4 Zu jeder Aussage links gehört genau eine Gleichung rechts. Ordnen Sie jeder Aussage die richtige Gleichung zu und tragen Sie den entsprechenden Buchstaben in die freie Spalte ein.

F	x ist das Gewicht eines Apfels. Der Apfel wird halbiert. Durch Austrocknen verliert die eine Hälfte 10 % des Gewichts. Diese Hälfte wiegt dann noch 45 g.		$(x + 3) + x = 45$	______
E	Für ein Guthaben von x € erhält man 45 € Zinsen. Der Zinssatz beträgt 3 %.		$x + 2x = 45$	______
R	Addiert man zu einer Zahl x das Doppelte dieser Zahl, so erhält man als Summe 45.		$\frac{x}{100} \cdot 3 = 45$	______
R	Für die erste Runde eines Mountainbike-Rennens braucht Max x Minuten. In der zweiten Runde wird er müde und braucht 10 % länger. Seine Gesamtzeit für die zwei Runden beträgt 45 Minuten.		$(x - 3) + x = 45$	______
T	Die Länge zweier Stäbchen unterscheiden sich um 3 cm. Das kürzere hat die Länge x. Wenn man die Stäbchen hintereinander legt, beträgt die Gesamtlänge 45 cm.		$\frac{x}{2} \cdot 0{,}9 = 45$	______
F	x ist das Alter von Susi. Franz ist 3 Jahre jünger als Susi. Zusammen sind sie 45 Jahre alt.		$x(x + 3) = 45$	______
E	Ein rechteckiges Gartengrundstück, bei dem sich die beiden Seitenlängen um 3 m unterscheiden, hat eine Fläche von 45 m^2.		$2x + \frac{x}{10} = 45$	______

5 Niko fragt seine Mathematiklehrerin Frau Müller nach ihrem Geburtsdatum. Frau Müller: „Ich habe meinen Geburtstag als 8-stellige Zahl in deinen Taschenrechner eingetippt – zwei Ziffern für den Tag, zwei für den Monat und vier für mein Geburtsjahr. Allerdings habe ich die Zahl codiert, indem ich zuerst eine Million von dieser Zahl abgezogen und das Ergebnis durch 1500 geteilt habe. Von der um 100 verminderten Wurzel dieses Ergebnisses habe ich den Kehrwert gebildet."
Als sie Niko den Taschenrechner zurückgibt, steht auf dem Display 13.661225.

13.661225

____

____

____

6 Die beiden Hobbygärtner Jörg und Thomas unterhalten sich über die heftigen Niederschläge der vergangenen Tage.
Jörg: „Im Radio habe ich gehört, dass es bei dem Unwetter gestern 50 Liter geregnet hat".
Thomas: „Das ist mehr, als es normalerweise in einem ganzen Monat regnet. Ich habe nämlich im Internet gelesen, dass die durchschnittliche monatliche Regenmenge bei uns für diesen Monat 50 mm beträgt."
Ihr Freund, der bei dieser Unterhaltung zugehört hat, sagt, er habe nur „Bahnhof" verstanden. Können Sie ihm die Aussagen möglichst präzise und anschaulich erläutern?

____

____

____

____

7 Suchen Sie aus den folgenden Zeitungsnotizen eine aus und schreiben Sie einen Leserbrief an diese Zeitung.

Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute nur noch jeder fünfte. Doch auch fünf Prozent sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnellfahrer haben zu zahlen.

Jede fünfte erwerbstätige Mutter in Deutschland arbeitet zumindest gelegentlich auch an Sonn- und Feiertagen. In Ostdeutschland arbeitet jede zweite Mutter mit Kindern unter 18 Jahren an Sonn- und Feiertagen (49 %), im Westen tut dies etwa jede dritte (38 %).

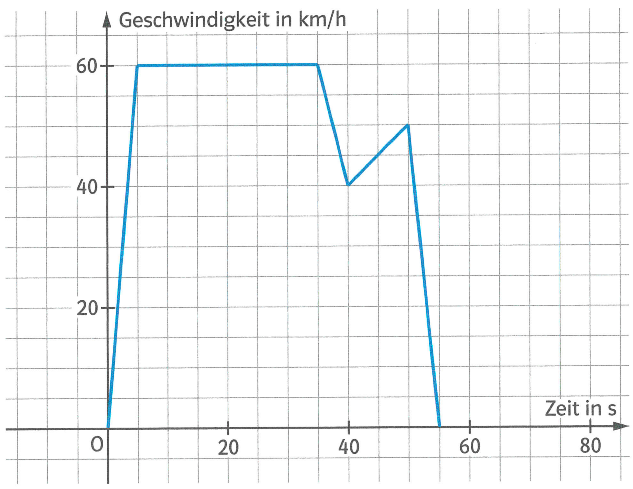
In einem **Leserbrief** äußern Sie schriftlich Ihre Meinung zu einem bestimmten Thema. Sie gehen auf die Inhalte des Zeitungsartikels ein, stimmen zu, ergänzen oder widersprechen und stellen richtig.

Die epidemiologischen Untersuchungen haben nachgewiesen, dass unser Älterwerden mit besserer Gesundheit einhergeht. Beispielsweise waren die 70-Jährigen 1983 um 10 Jahre jünger und gesünder als die 70-Jährigen 1973.

Über 2000 Euro hat keines unserer Testgeräte gekostet; die Preise sind innerhalb von zwei Monaten um bis zu 100 Prozent gefallen. Und sie werden weiter sinken!

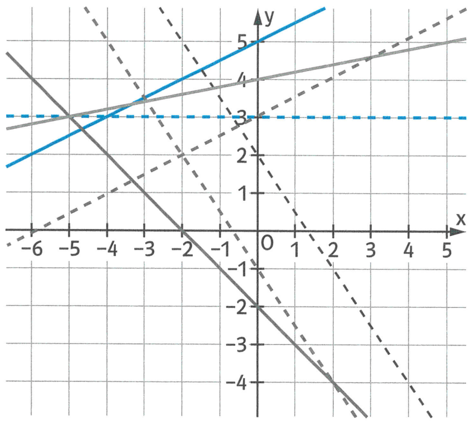
8 Aus den Daten eines Fahrtenschreibers ergibt sich das nebenstehende Schaubild.

a) Schreiben Sie dazu eine Geschichte.



b) Wie könnte die Geschichte lauten, wenn nach oben nicht die Geschwindigkeit, sondern die Füllmenge in Litern eines 120-Liter-Fasses und nach rechts die Zeit in Minuten aufgetragen wäre?

9 Im nebenstehenden Diagramm sind sieben Geraden gezeichnet. Überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Formulieren Sie zu jeder Aussage auch die Gegenaussage.

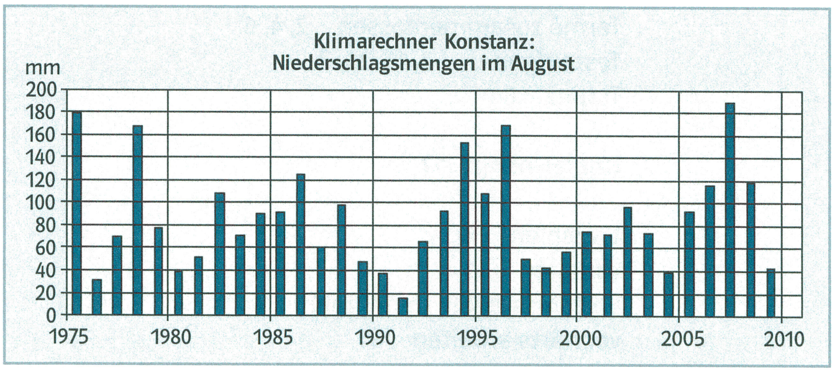


Eine Gegenaussage sagt genau das Gegenteil der Aussage aus.
Wenn die Aussage wahr ist, ist die Gegenaussage falsch, und umgekehrt.

	wahr	falsch	Gegenaussage
Es gibt genau zwei Paare paralleler Geraden.			
Keine der Geraden hat die Gleichung $y = 1{,}3x - 2$.			
Alle Geraden haben unterschiedliche Steigungen.			
Mehr als 60 % der Geraden haben einen positiven y-Achsenabschnitt.			
Höchstens eine Gerade verläuft vollständig im Bereich $y > 0$.			
Jede der Geraden schneidet jede andere in einem Punkt.			

10 Lisa entdeckt bei ihrer Recherche nach Wetterdaten im Internet das folgende Diagramm.

Tipps zur Lösung finden Sie auf Seite 74 bei den Brückenaufgaben.



Formulieren Sie mindestens drei Aussagen, die Sie aus dem Diagramm ablesen können.

Mögliche **Satzanfänge**: „Fast in jedem Jahr …", „Höchstens in 10 % aller Jahre …", „Mindestens in 5 Jahren …", „Durchschnittlich …".

Register