Lambacher Schweizer

Mathematik

Sicher in die Oberstufe

Arbeitsheft nach dem mittleren Bildungsabschluss

Lösungen

1 Terme

Übungsaufgaben, Seite 6

1

a) $2x - y$ b) $2m + 2n$ c) $3a + 2b$ d) $x - 4y$

e) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}z$ f) $2{,}5x^2 + 0{,}6xy + 0{,}25y^2$

2

a) $8a - 28ab$ b) $6x - 4xy + y$

c) $-7m + 4n$ d) $12s^2 + 143st - 12t^2$

e) $4x^2 - 10xy + 4y^2$ f) $-10a^2 + 15ab - 3b^2$

3

a) $14y(x - 2)$ b) $5xy(3x - 5y)$

c) $11ab(3a + 7 - b)$ d) $16xy(4x - 3 + 6y)$

e) $27abc(3a - 2c + b - 5)$

f) $a(3a + 1) - b(3a + 1) = (3a + 1)(a - b)$

4

a) $2a - b$ b) $-x + y$ c) $2c - d$ d) $x - 2y$

Übungsaufgaben, Seite 7

5

a) $4a^2 + 12a + 9$ b) $x^2 - 6xy + 9y^2$

c) $49s^2 - t^2$ d) $u^2 - 2uv + v^2$

e) $(4x + 5y)^2$ f) $(10r - 1)^2$

g) $(11ab^2 - 17a^2b)(11ab^2 + 17a^2b)$

h) $3z(3x - 4y)(3x + 4y)$

6

a) $\frac{3x}{4y}$ b) $5c$ c) $\frac{x-2}{3}$ d) $\frac{7x-9y}{2}$

7

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3a^2}{4}$ d) $\frac{v-1}{2u}$

EXKURS – Pascal'sches Dreieck

a) Im Pascal'schen Dreieck ist jede Zahl die Summe der beiden Zahlen, die links und rechts oberhalb von ihr stehen.

7. Zeile:	1	6	15	20	15	6	1	
8. Zeile:	1	7	21	35	35	21	7	1

b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

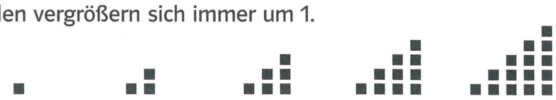
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Der Exponent des Binoms bestimmt die Zeile des Pascal'schen Dreiecks, genauer: Exponent des Binoms = Zeile des Pascal'schen Dreiecks – 1. Im Pascal'schen Dreieck können dann die Koeffizienten abgelesen werden.

Entstehung der ersten Zeile: $(a + b)^0 = 1$

Entstehung der zweiten Zeile: $(a + b)^1 = a + b$

c) Die sogenannten Dreieckszahlen finden sich in der dritten Diagonalen (in der Grafik grau unterlegt).
Die Differenzen zwischen den einzelnen Gliedern der Dreieckszahlen vergrößern sich immer um 1.



1 3 6 10 15

+ 2 + 3 + 4 + 5

$n = 3$: $\frac{n}{2} \cdot (n + 1) = \frac{3}{2} \cdot (3 + 1) = 6$

$n = 4$: $\frac{n}{2} \cdot (n + 1) = \frac{4}{2} \cdot (4 + 1) = 10$

Übungsaufgaben, Seite 8

8

a) $5^7 = 78\,125$ b) $7^3 = 343$

c) $6^{-5} = \frac{1}{6^5} = \frac{1}{7776}$ d) $2^{12} = 4096$

e) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ f) 3^{2a+2}

g) x^5 h) a^{n^2-1}

9

a) $8{,}35 \cdot 10^8$	b) 2 800 000 000	c) $1{,}22 \cdot 10^{17}$
$2{,}5 \cdot 10^{-9}$	0,000 000 328	$9{,}36 \cdot 10^{-17}$
$2{,}013 \cdot 10^{13}$	299 792 458	
$9{,}65 \cdot 10^{12}$	10^{-9}	

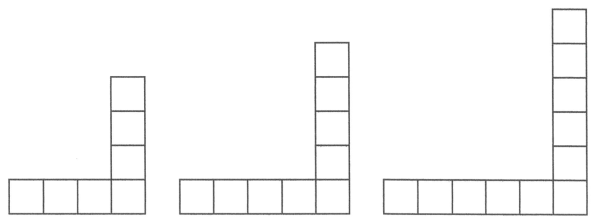
10

a) 9 2 $4y$ $\frac{x^2}{2}$

b) $4\sqrt{2}$ $8a\sqrt{2a}$ $7\sqrt{2}$ $-t\sqrt{3s}$

11

a)



Die 100. Figur besteht aus 199 Quadraten.

Term für den Umfang der n-ten Figur: $4n \cdot x$

Term für den Flächeninhalt der n-ten Figur: $(2n - 1) \cdot x^2$

Übungsaufgaben, Seite 9

11

b) 40 Streben

Term zur Berechnung der Gesamtanzahl der verwendeten Streben für ein Gitter den Grundlägen n dm:

$4 \cdot (n + 1) + 2 \cdot 2 = 6 \cdot n + 4$

mit 52 Teilstreben

c) Ja, Svenja hat Recht.

$5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 25 + 36 + 49 + 64 = 174$

$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 4n^2 + 12n + 14$

$= 2(2n^2 + 6n + 7).$

Damit ist die Zahl immer durch 2 teilbar und somit gerade.

Werden drei aufeinanderfolgende Quadratzahlen addiert, dann hängt es davon ab, ob man mit einer ungeraden oder einer geraden Zahl startet.

Sind in der Summe zwei gerade Quadratzahlen vertreten, dann ist die Summe dreier aufeinanderfolgender Quadratzahlen ungerade, sonst ist die Summe gerade.

d) Länge einer Würfelkante: $a = 10\,\text{cm}$

Kantensumme $K = 480\,\text{cm}$

Volumen $V = 10\,\text{dm}^3$

Term für die Berechnung des Oberflächeninhalts: $O = 402\,a^2$

Volumen $V = 12\,500\,\text{cm}^3$

$O_{100} = 402\,\text{dm}^2$; $O_{10} \approx 194{,}9\,\text{dm}^2$; Differenz $D \approx 207{,}1\,\text{dm}^2$

2 Gleichungen

Übungsaufgaben, Seite 16

1

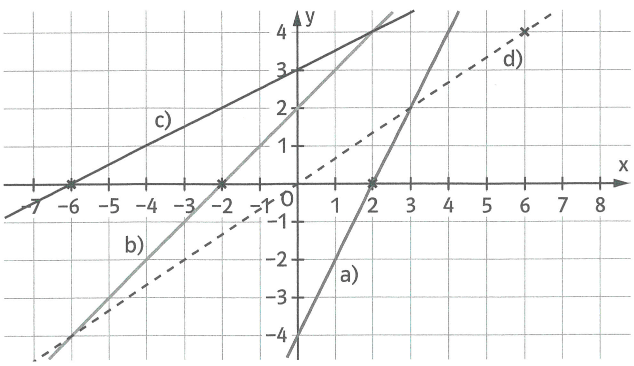
a) $x = 3$	b) $x = 0$	c) $x = 0{,}5$	d) $x = 1{,}5$
e) $x = 2$	f) $x = -2$	g) $x = -0{,}5$	h) $x = 1$
i) $x = 1$	j) $x = -1$		
k) $x = -15$	l) $x = 5$	m) $x = 7$	n) $x = 3$

2

a) $a = \frac{A}{b}$	$b = \frac{A}{a}$	b) $h = \frac{V}{a^2}$	$a = \sqrt{\frac{V}{h}}$
c) $a = \frac{2A}{h} - c$	$h = \frac{2A}{a + c}$	d) $r_1 = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_2^2}$	$r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{A}{\pi}}$
e) $m = \frac{r \cdot F}{v^2}$	$r = \frac{m \cdot v^2}{F}$	f) $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$	$R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$
$v = \sqrt{\frac{r \cdot F}{m}}$		$R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$	

Übungsaufgaben, Seite 17

3



a) $2x - 4 = 0$

zugehörige Funktionsgleichung: $y = 2x - 4$

$x = 2$

b) $2 + x = 0$

zugehörige Funktionsgleichung: $y = x + 2$

$x = -2$

c) $\frac{1}{2}x + 3 = 0$

zugehörige Funktionsgleichung: $y = \frac{1}{2}x + 3$

$x = -6$

d) $\frac{2}{3}x = 4$

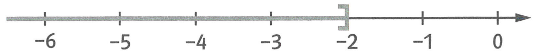
zugehörige Funktionsgleichung: $y = \frac{2}{3}x - 4$

$x = 6$

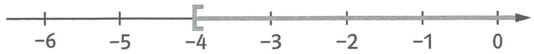
EXKURS – Lineare Ungleichungen

a) $x < 3$

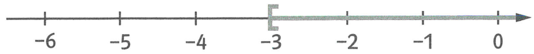
$x < -2$



b) $x > -4$



$x > -3$



$x > 1{,}5$

Übungsaufgaben, Seite 18

4

a) Zwei Lösungen, da $(4x - 1)^2 - (x - 4)^2 = 15(x - 1)(x + 1) = 0$

$x_1 = +1$; $x_2 = -1$

b) Keine Lösung, da $x^2 = -1$.

c) Eine Lösung, da $x^2 = 0$. $\quad x = 0$

d) Zwei Lösungen, da $x^2 = \frac{4}{3}$. $\quad x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

EXKURS – Die abc-Formel, eine andere Lösunsformel

a) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Hier kann man durch Anwenden der abc-Formel das Rechnen mit Brüchen vermeiden.

$x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -2$

$x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} = 0$

Wenn man die Gleichung mit 4 durchmultipliziert, kann man vorteilhaft mit der abc-Formel rechnen.

$4x^2 - x - 5 = 0$

$x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = -1$

b) $3x^2 - 4x - 4 = 0$

$x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{3}$

$12x^2 - 25x + 12 = 0$

$x_1 = \frac{3}{4}$; $x_2 = \frac{4}{3}$

$(x - 3)^2 + 2(x - 1)^2 = 4x + 3$

$3x^2 - 14x + 8 = 0$

$x_1 = 4$; $x_2 = \frac{2}{3}$

$3x - 42 = 42(x + 1) - 12x(x + 1)$

$4x^2 - 9x - 28 = 0$

$x_1 = -\frac{7}{4}$; $x_2 = 4$

5

a) $x_1 = 1;\ x_2 = -4$

b) $x_1 = x_2 = -3$

c) $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{3}{4}$

d) $x^2 - 6x + 5 = 0$
$x_1 = 1;\ x_2 = 5$

e) $x_1 = -5;\ x_2 = 4$

f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$
$x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$

g) $x^2 - 2x - 8 = 0$
$x_1 = 4;\ x_2 = -2$

h) $x^2 - 2x - 80 = 0$
$x_1 = 10;\ x_2 = -8$

Übungsaufgaben, Seite 18

EXKURS – Untersuchung der Diskriminante

a) zwei Lösungen

b) zwei Lösungen

c) eine Lösung

d) $x^2 - 5x + 10 = 0$; keine Lösung

6

a) $5x^2 - 12x + 7 = 0;\quad x_1 = 1{,}4;\ x_2 = 1$

b) $x^2 = 16;\quad x_1 = +4;\ x_2 = -4$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0;\quad x_1 = 3;\ x_2 = -1$

d) $5x^2 - 12x + 4 = 0;\quad x_1 = 2;\ x_2 = 0{,}4$

e) $x^2 + 8x - 20 = 0;\quad x_1 = 2;\ x_2 = -10$

f) $x^2 - 10x + 16 = 0;\quad x_1 = 2;\ x_2 = 8$

EXKURS – Sonderfälle quadratischer Gleichungen

a) $x(x + 5) = 0\quad x_1 = 0;\ x_2 = -5$

b) $x(2x - 9) = 0\quad x_1 = 0;\ x_2 = 4{,}5$

c) $x(7x - 17) = 0\quad x_1 = 0;\ x_2 = \frac{17}{7}$

d) $x(x - 17) = 0\quad x_1 = 0;\ x_2 = 17$

e) $x_1 = x_2 = -3$

Übungsaufgaben, Seite 20

EXKURS – Linearfaktoren und Nullstellenform

a) $(x + 1)(x + 6) = 0$
$x_1 = -1;\ x_2 = -6$

$(x - 0{,}5)(x + 0{,}5) = 0$
$x_1 = 0{,}5;\ x_2 = -0{,}5$

$(2x + 5)(5x - 2) = 0$
$x_1 = -\frac{5}{2};\ x_2 = \frac{2}{5}$

$3(4x - 5)(6 + 7x)$
$x_1 = \frac{5}{4};\ x_2 = -\frac{6}{7}$

b) $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$
$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$
$x_1 = -2$ und $x_2 = -3$

$(x + 2)(x + 3) = 0$
$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{3}$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$
$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$

7 Definitionsmenge und Lösungsmenge der Gleichung.

a) $D = \mathbb{R}\setminus\{0; -4\};\ L = \{12; -3\}$

b) $D = \mathbb{R}\setminus\left\{0; -\frac{3}{4}\right\};\ L = \{1; -0{,}5\}$

c) $D = \mathbb{R}\setminus\{0; -1\};\ L = \{2; -4\}$

d) $D = \mathbb{R}\setminus\{4; -4\};\ L = \{\ \}$

e) $D = \mathbb{R}\setminus\{3\};\ L = \{4\}$

f) $D = \mathbb{R}\setminus\{0; -3\};\ L = \{-6\}$

Übungsaufgaben, Seite 21

8

a) 0 ist Lösung der Gleichung.

b) $\frac{1}{3}$ ist Lösung. Die Gleichung ist allgemeingültig. Man kann für x jede beliebige Zahl einsetzen.

c) −3 ist keine Lösung der Gleichung. Die Gleichung hat keine Lösung, da $x^2 = -9$ ist.

d) 5 ist keine Lösung der Bruchgleichung, da die Zahl nicht zur Definitionsmenge gehört.

9

a) Normalpreis für Frau Beck: 6 · 82,00 € = 492 €
Mit BC 25: 57 € + 492 · 0,75 = 426 €, Ersparnis: 66 €
Mit BC 50: 230 € + 492 · 0,50 = 476 €, Ersparnis: 16 €
Für Frau Beck lohnt sich die BC 25.
Normalpreis für Herrn Maier: 4 · 82,00 € = 328 €
Mit BC 25: 57 € + 328 · 0,75 = 303 €, Ersparnis: 15 €
Mit BC 50: 230 € + 328 · 0,50 = 394 €, Ersparnis: keine
Für Herrn Maier lohnt sich die BC 25, mit einer BC 50 würde er insgesamt sogar mehr bezahlen.

b) $20\,\frac{km}{h} = 20 \cdot \frac{1000\,m}{3600\,s} \approx 5{,}56\,\frac{m}{s}$
$40\,\frac{km}{h} = 40 \cdot \frac{1000\,m}{3600\,s} \approx 11{,}11\,\frac{m}{s}$

Bremswege in m		trocken	nass	Neuschnee (WR)	Neuschnee (SR)	Glatteis
$20\,\frac{km}{h}$	Formel	2,20 m	2,81 m	5,51 m	6,71 m	11,87 m
	Faustformel	4 m				
$40\,\frac{km}{h}$	Formel	8,82 m	11,22 m	22,05 m	26,84 m	47,48 m
	Faustformel	16 m				

- Bei Verdoppelung der Geschwindigkeit vervierfacht sich der Bremsweg (sowohl bei der Formel wie auch bei der Faustformel). Die Fraustformel liefert jeweils einen Bremsweg, der länger als derjenige bei nasser Fahrbahn und kürzer als derjenige bei Neuschnee (WR) liegt. D. h. die Faustformel eigent sich gut bei „normalen" Straßenverhältnissen (und erweist sich als komplett ungeeignet bei Glatteis oder Neuschnee (SR)).
- Bei dreifacher Geschwindigkeit verneunfacht sich der Bremsweg.
- Der Anhalteweg bei Glatteis und einer Geschwindigkeit von $20\,\frac{km}{h}$ beträgt ca. 20,20 m und ist somit ca. 170 % länger als der reine Bremsweg.
- Es gilt: $v \cdot 1{,}5 + \frac{v^2}{2 \cdot 5{,}5} = 100$
  Zu lösen ist die Gleichung $v^2 + 16{,}5 \cdot v - 1100 = 0$.
  Daraus ergibt sich $v_1 = 25{,}93\,\frac{m}{s} \approx 93{,}3\,\frac{km}{h}$.
  Das Auto fuhr mit einer Geschwindigkeit von ca. $90\,\frac{km}{h}$.

3 Lineare Funktionen

Übungsaufgaben, Seite 30

1

a) $g: y = 2x + 3$

$h: y = -2x + 1$

$i: y = x - 1$

$j: y = \frac{1}{2}x - 2$

b) $g: y = -x + 1{,}5$

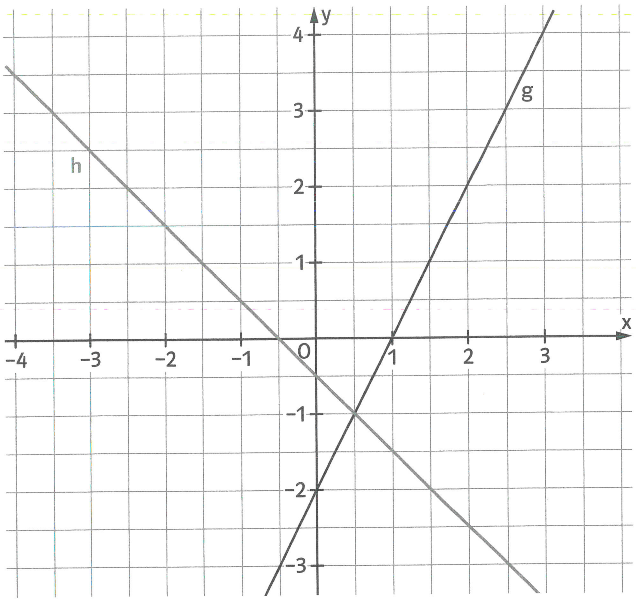
$h: y = -\frac{1}{2}x - 1{,}5$

$i: y = 2{,}5x + 2{,}5$

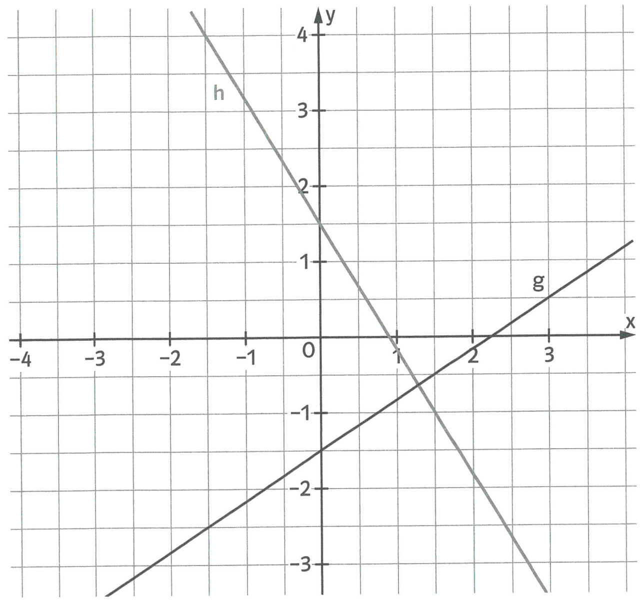
$j: y = \frac{2}{3}x + 0{,}5$

2

a) g: $y = 2x - 2$ h: $y = -x - 0{,}5$



b) g: $y = \frac{2}{3}x - 1{,}5$ h: $y = -\frac{5}{3}x + 1{,}5$



Übungsaufgaben, Seite 31

3

a) $y = x - 1$ b) $y = \frac{3}{4}x + 4{,}5$

c) $y = 1{,}5x - 7{,}25$ d) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{9}{5}$

4

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -3x - 4$ c) $y = \frac{1}{2}x - 3$ d) $y = -\frac{5}{7}x - 5$

e) $y = 3x + 8$ f) $y = \frac{1}{3}x - 2$ g) $y = -\frac{3}{4}x - 3$ h) $y = \frac{2}{3}x - 1{,}5$

EXKURS – Punkt-Steigungs-Form und Zwei-Punkte-Form

a) $y = 3x - 10$; $y = -2x - 9$; $y = x - 2$

b) $y = 2x + 3$; $y = -\frac{3}{4}x - 2$

c) Die Punkte P, Q und R liegen alle auf der Geraden $y = \frac{1}{2}x - 5$.
Die Punkte R, S und T liegen nicht auf einer Geraden.

Übungsaufgaben, Seite 32

EXKURS – Besondere Lage von zwei Geraden zueinander

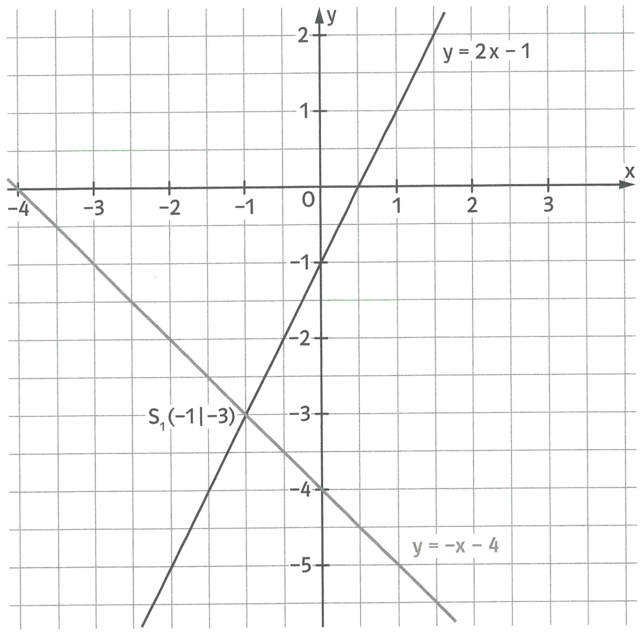
a) Mögliche Gerade h: $y = 3x - 1$
Mögliche Gerade h: $y = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$

b) Mögliche Gerade h: $y = -\frac{1}{2}x - 3$
Mögliche Gerade h: $y = 4x - 3$

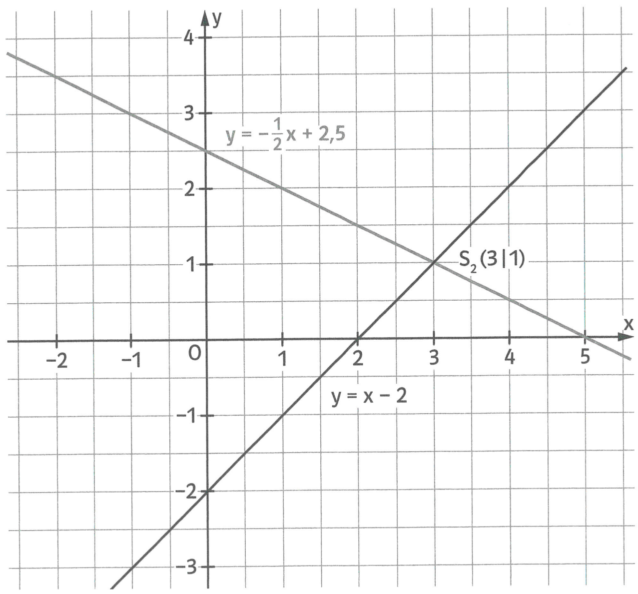
c) Gerade g: $y = \frac{1}{2}x - 5{,}5$

5

a)

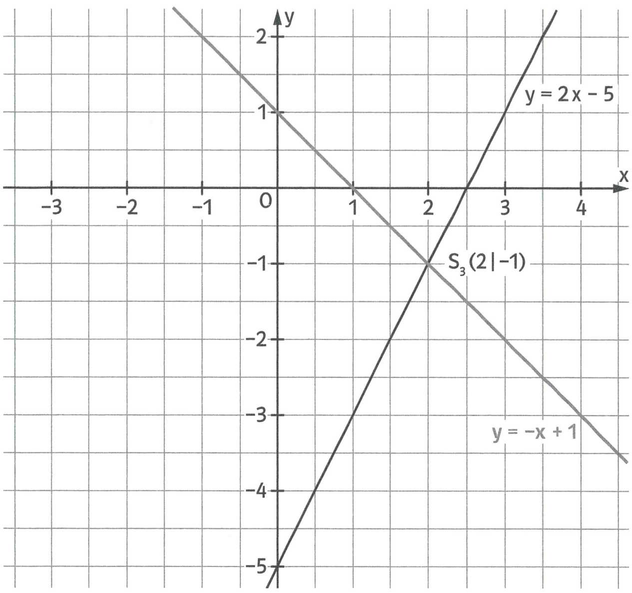


b)

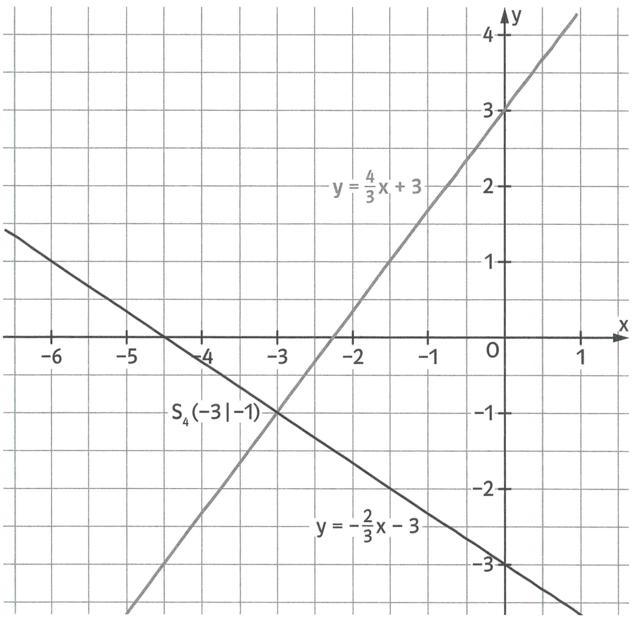


5

c)



d)



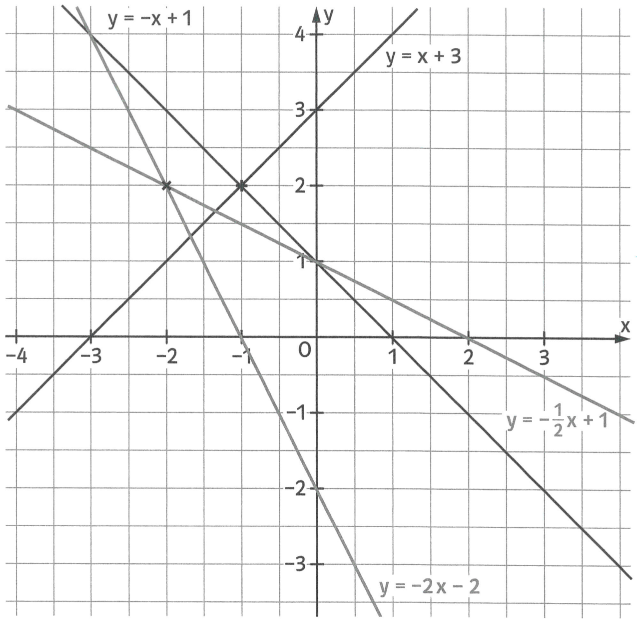
Übungsaufgaben, Seite 33

5

e) Schnittpunkt $S_1(5\,|\,2)$ f) Schnittpunkt $S_2(-0{,}5\,|\,-2{,}5)$

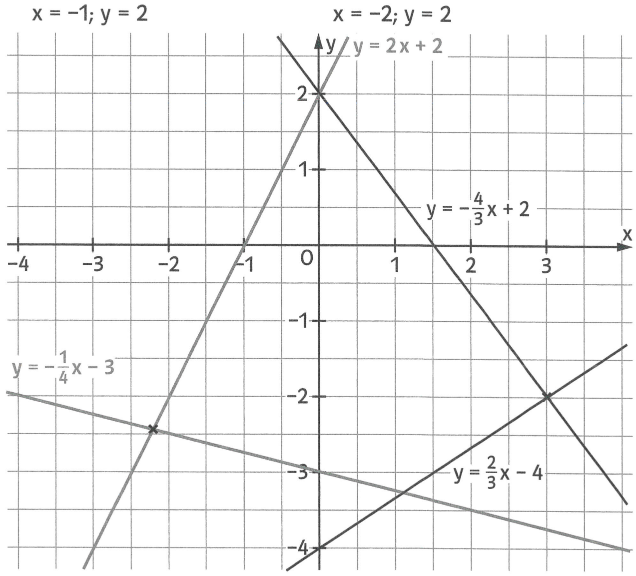
g) Schnittpunkt $S_3(16\,|\,7)$ h) Schnittpunkt $S_4(-2\,|\,3)$

6



a) $S(-1\,|\,2)$
$x = -1;\ y = 2$

c) $S(-2\,|\,2)$
$x = -2;\ y = 2$



b) $S\left(-\frac{20}{9}\,\middle|\,-\frac{22}{9}\right)$
$x = -2{,}2;\ y = -2{,}4$

d) $S(3\,|\,-2)$
$x = 3;\ y = -2$

Übungsaufgaben, Seite 34

7

a) $x = -17$, $y = -7$	b) $x = -2$, $y = -13$	c) $x = 1$, $y = 5$	d) $x = 2$, $y = -2$
e) $x = 1$, $y = 2$	f) $x = 4$, $y = 3$	g) $x = -1$, $y = -1$	h) $x = -2$, $y = -5$
i) $x = 7$, $y = -1$	j) $x = 2$, $y = 1$	k) $x = 1{,}5$, $y = -1$	l) $x = -2$, $y = -5$
m) $x = -1$, $y = 2$	n) $x = 13$, $y = 7$	o) $x = 3$, $y = -1$	p) $x = 8$, $y = 9$

8

a) **Behälterfüllungen**

Behälter A: $y = 12x$ Behälter B: $y = 10x + 12$

Gleiche Wasserhöhe nach 6 Stunden.

Nach 10 Stunden läuft der Behälter A zuerst über. Das Wasser steht im Moment des Überlaufens von Behälter A im Behälter B 112 cm hoch.

Übungsaufgaben, Seite 35

8

b) **Stromgebühren**

Kosten Basistarif: $K_B = 4000 \cdot 0{,}197€ + 95€ = 883€$

Kosten Partnerstrom: $K_P = 4000 \cdot 0{,}205€ + 12 \cdot 4€ = 868€$

Das Angebot Partnerstrom ist günstiger.

Ein Tarifwechsel ist ab 5875 kWh Verbrauch pro Jahr zu empfehlen.

(mögliche Lösung über Gleichungsansatz:
$x \cdot 0{,}197€ + 95 = x \cdot 0{,}205€ + 12 \cdot 4€$)

c) **Abfallgebühren**

Jahresgebühren der Familie Weiß:

$G = 20 \cdot 6{,}60€ + 18 \cdot 4{,}40€ + 95{,}90€ = 307{,}10€$

Die Bio- als auch die Restmülltonne von Frau Braun wurden jeweils 11-mal geleert.

(mögliche Lösung über Gleichungsansatz:
$113{,}90€ = 47{,}90€ + x \cdot (3{,}50€ + 2{,}50€)$)

4 Quadratische Funktionen

Übungsaufgaben, Seite 43

1

a) Zu $y = (x-1)^2 - 3$ gehört Schaubild A
Zu $y = x^2 - 1$ gehört Schaubild C
Zu $y = (x+3)^2 + 2$ gehört Schaubild D
Zu $y = (x-3)^2$ gehört Schaubild B

b) Zu $y = -x^2 + 4$ gehört Schaubild B
Zu $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ gehört Schaubild C
Zu $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ gehört Schaubild D
Zu $y = 2x^2 - 1$ gehört Schaubild A

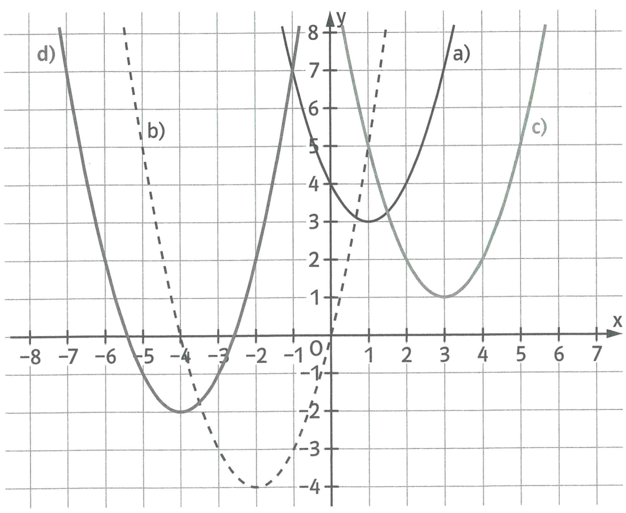
2

a) $y = x^2 - 2x + 4$
$y = (x-1)^2 + 3$ $S(1|3)$

b) $y = x^2 + 4x$
$y = (x+2)^2 - 4$ $S(-2|-4)$

c) $y = x^2 - 6x + 10$
$y = (x-3)^2 + 1$ $S(3|1)$

d) $y = x^2 + 8x + 14$
$y = (x+4)^2 - 2$ $S(-4|-2)$



Übungsaufgaben, Seite 44

3

Wertetabellen

Die y-Achse ist für alle Schaubilder Symmetrieachse.

a)

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	3,5	1	−0,5	−1	−0,5	1

b)

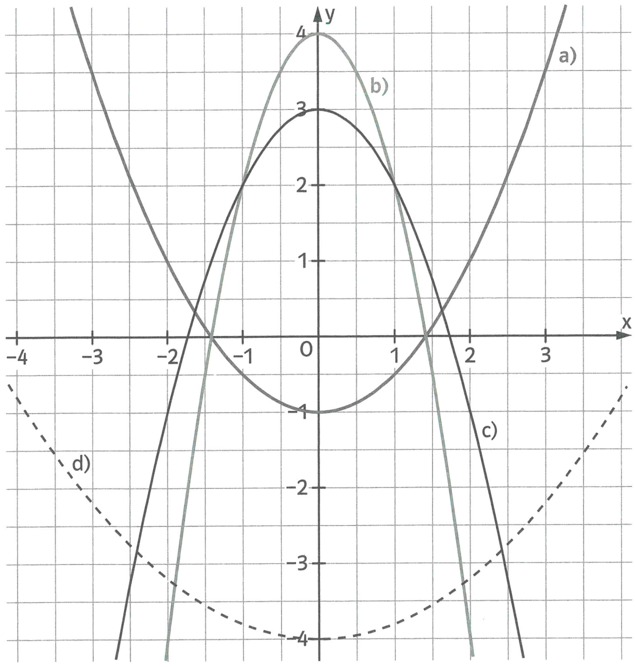
x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5
y	−4	−0,5	2	3,5	4	3,5

c)

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−6	−1	2	3	2	−1

d)

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−2,2	−3,2	−3,8	−4	−3,8	−3,2



EXKURS – Graphen von Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$

Verschiedene Arten das Schaubild der Funktion zu zeichnen:

- Mithilfe einer Wertetabelle

a) $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$

x	−3	−2	−1	0	0,5	1
y	0	−9	−12	−9	−5,25	0

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$

x	−1	−0,5	0	0,5	1	2
y	5,5	3,125	1	−0,875	−2,5	−5

c) $f(x) = -x^2 - 3x + 2$

x	−1	−0,5	0	0,5	1	2
y	4	3,25	2	0,25	−2	−8

- Durch Umformen in die Scheitelform

a) $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$
$f(x) = 3(x^2 + 2x + 1 - 4)$
$f(x) = 3(x+1)^2 - 12$ $S(-1|-12)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$

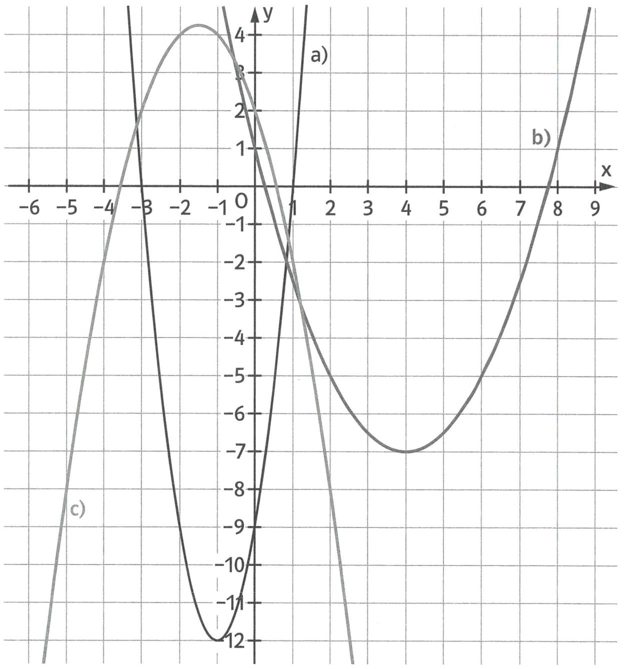
$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 14)$

$f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 7$ $S(4\,|\,{-7})$

c) $f(x) = -x^2 - 3x + 2$

$f(x) = -(x^2 + 3x + 2{,}25 - 4{,}25)$

$f(x) = -(x + 1{,}5)^2 + 4{,}25$ $S(-1{,}5\,|\,4{,}25)$



Übungsaufgaben, Seite 45

4

a) $A(1\,|\,2)$ und $B(4\,|\,{-1})$

$p = -6;\ q = 7$

$f(x) = x^2 - 6x + 7$

$f(x) = (x - 3)^2 - 2$ $S(3\,|\,{-2})$

b) $A(4\,|\,2)$ und $B(7\,|\,5)$

$p = -10;\ q = 26$

$f(x) = x^2 - 10x + 26$

$f(x) = (x - 5)^2 + 1$ $S(5\,|\,1)$

c) $A(-1\,|\,{-3})$ und $B(-4\,|\,0)$

$p = 4;\ q = 0$

$f(x) = x^2 + 4x$

$f(x) = (x + 2)^2 - 4$ $S(-2\,|\,{-4})$

d) $A(0\,|\,2)$ und $B(2{,}5\,|\,{-1{,}75})$

$p = -4;\ q = 2$

$f(x) = x^2 - 4x + 2$

$f(x) = (x - 2)^2 - 2$ $S(2\,|\,{-2})$

Parabelgleichung $y = ax^2 + c$

e) $S(0\,|\,{-5})$ und $P(2\,|\,{-3})$

$a = \frac{1}{2};\ c = -5$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 5$

f) $S(0\,|\,2)$ und $P(-2\,|\,{-6})$

$a = -2;\ c = 2$

$y = -2x^2 + 2$

5

Verschobene Normalparabel mit dem Punkt P.

a) $y = x^2 + 4x + q$ und $P(-4\,|\,2{,}5)$

$q = 2{,}5$

$y = x^2 + 4x + 2{,}5$ $S(-2\,|\,{-1{,}5})$

b) $y = x^2 - 6x + q$ und $P(2\,|\,{-4})$

$q = 4$

$y = x^2 - 6x + 4$ $S(3\,|\,{-5})$

c) $y = x^2 + px + 5$ und $P(2\,|\,5)$

$p = -2$

$y = x^2 - 2x + 5$ $S(1\,|\,4)$

d) $y = x^2 + px - 2$ und $P(-3\,|\,1)$

$p = 2$

$y = x^2 + 2x - 2$ $S(-1\,|\,{-3})$

6

Für $y = 0$ erhält man eine quadratische Gleichung.

a) $0 = x^2 - 7x + 10$

$x_1 = 2;\ x_2 = 5$

b) $0 = x^2 - 2x - 3$

$x_1 = 3;\ x_2 = -1$

c) $0 = x^2 + 6x + 8$

$x_1 = -2;\ x_2 = -4$

d) $0 = 2x^2 + 5x$

$x_1 = 0;\ x_2 = -2{,}5$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
N sind die Schnittpunkte mit der x-Achse.
Y ist der Schnittpunkt mit der y-Achse.

e) $f(x) = x^2 - 8x + 7$ $N_1(1\,|\,0);\ N_2(7\,|\,0);\ Y(0\,|\,7)$

f) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

keine Schnittpunkte mit der x-Achse; $Y(0\,|\,3)$

g) $f(x) = x^2 - 4x + 6$

keine Schnittpunkte mit der x-Achse; $Y(0\,|\,6)$

h) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ $N_1(\frac{1}{3}\,|\,0);\ N_2(-2\,|\,0);\ Y(0\,|\,{-2})$

Übungsaufgaben, Seite 46

7

Parabel p und Gerade g

a) p: $y = x^2 - 2x - 3$ und g: $y = 2x - 3$

$P(0\,|\,{-3})$ und $Q(4\,|\,5)$

b) p: $y = x^2 + 4x + 1$ und g: $y = -2x - 4$

$P(-1\,|\,{-2})$ und $Q(-5\,|\,6)$

c) p: $y = x^2 - 3x - 1{,}75$ und g: $y = -\frac{1}{2}x + 1{,}75$

$P(-1\,|\,2{,}25)$ und $Q(3{,}5\,|\,0)$

d) p: $y = x(x + 3)$ und g: $y = -x - 4$

$P(-2\,|\,{-2})$

Die Gerade ist eine Tangente.

EXKURS – Tangenten, Sekanten, Passanten

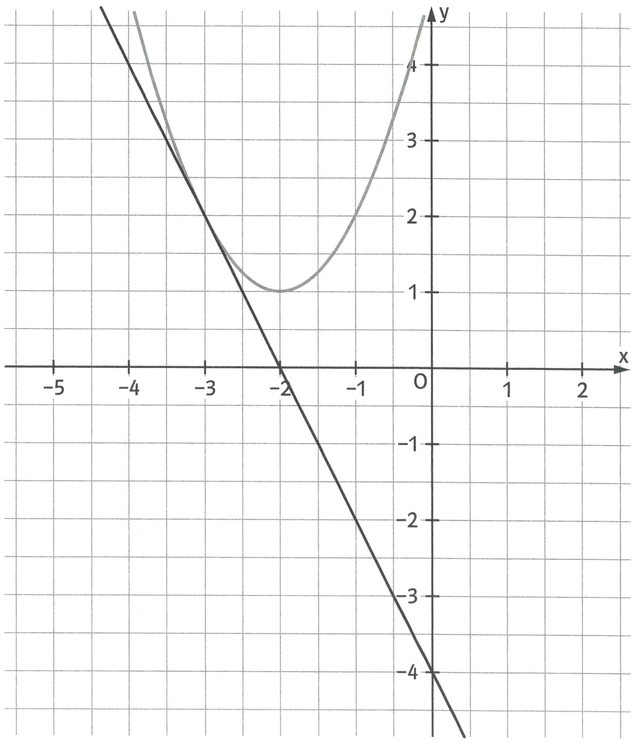
a) Rechnerische Überprüfung

$x^2 + 4x + 5 = -2x - 4$

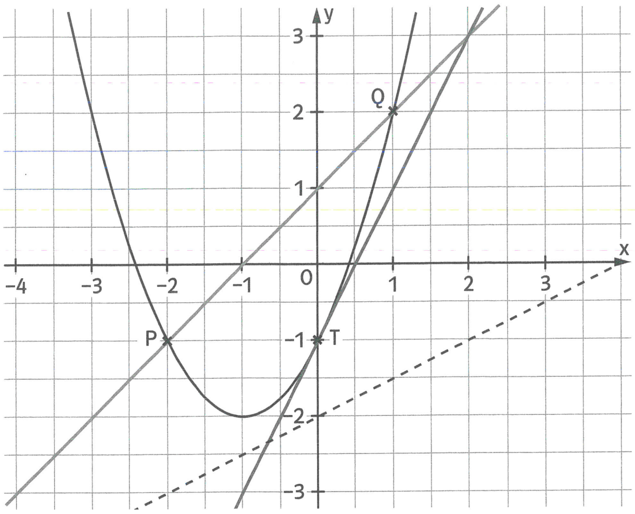
$x^2 + 6x + 9 = 0$

Es ergibt sich $x_1 = x_2 = -3$ und $y = 2$.

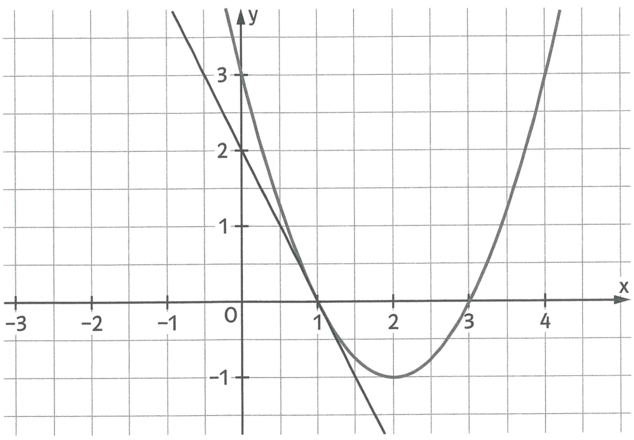
Der Berührpunkt hat also die Koordinaten $T(-3\,|\,2)$.



b) Die Parabel $y = x^2 + 2x - 1$ hat
mit $y = x + 1$ die zwei Punkte $P(-2|-1)$ und $Q(1|2)$,
mit $y = 2x - 1$ den einen Punkt $T(0|-1)$ und
mit $y = \frac{1}{2}x - 2$ keinen Punkt gemeinsam.



c) Parabel p: $y = x^2 - 4x + 3$
Gerade g: $y = -2x + a$
Für a = 3: $y = -2x + 3$
erhält man zwei Schnittpunkte $P(0|3)$ und $Q(2|-1)$.
Bedingung für einen Berührpunkt ist D = 0:
$x^2 - 4x + 3 = -2x + a$
$x^2 - 2x + 3 - a = 0$
dann ist $D = 1 - 3 + a = a - 2$
Für a = 2 berührt die Gerade die Parabel.
Gleichung der Geraden $y = -2x + 2$.



8

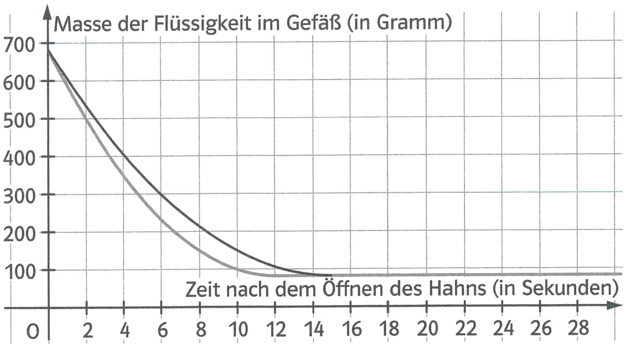
a) $y = x^2 - 4x + 7$ und $y = x^2 - 10x + 25$
ein Schnittpunkt; $P(3|4)$
b) $y = x^2 - 6x + 8$ und $y = -x^2 + 4$
$P(1|3)$ und $Q(2|0)$
c) $y = 2x^2 - 1$ und $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
$P(1|1)$ und $Q(-1|1)$
d) $y = (x - 4)(x + 1)$ und $y = -(x - 4)^2$
$P(1{,}5|-6{,}25)$ und $Q(4|0)$
e) Zwei nach oben geöffnete Normalparabeln, deren Scheitel denselben x-Wert haben, schneiden sich nicht, z. B.
$y = (x - 1)^2 + 4$ und $y = (x - 1)^2 - 2$.
Zwei Parabeln der Form $y = ax^2 + c$ haben keinen gemeinsamen Punkt, wenn $a_1 > a_2$ und $c_1 > c_2$.
Z. B. $y = 2x^2 + 3$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$.

5 Modellieren

Brückenaufgaben, Seite 52

1

a) Nach etwa 5 Sekunden ist das Gefäß noch zur Hälfte gefüllt.
b) Zuerst sind knapp 700 g Wasser im Gefäß. Aus der gekrümmten Kurve kann man erkennen, dass nach dem Öffnen des Hahns zuerst sehr viel Wasser aus dem Gefäß (etwa 100 g pro Sekunde) ausläuft, dann mit zunehmender Zeit immer weniger. Ab etwa 15 Sekunden läuft nichts mehr aus dem Gefäß aus, es bleiben etwa 80 g Wasser im Gefäß, weil der Hahn oberhalb des Gefäßbodens sitzt.
c) Wenn der Hahn stärker geöffnet wird, könnte das Auslaufverhalten zum Beispiel so (graue Kurve) aussehen:



Brückenaufgaben, Seite 53

d) Der Verlauf wird durch die gestrichelte Kurve wiedergegeben, weil die Anfangsmenge $680\,\text{ml} \cdot 0{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{ml}} = 612\,\text{g}$ beträgt, der Auslaufvorgang nach 15 Sekunden beendet ist und die Restmenge $80\,\text{ml} \cdot 0{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{ml}} = 72\,\text{g}$ beträgt.
e) Da man das Gesamtvolumen kennt, kann man die Querschnittsfläche und damit auch den Durchmesser des Gefäßes ausrechnen.
$V = A \cdot h$, $A = \frac{V}{h}$
Querschnittsfläche $A = 680\,\text{cm}^3 : 24\,\text{cm} \approx 28{,}3\,\text{cm}^2$
$A = \pi r^2$, Radius ≈ 3,0 cm oder Durchmesser ≈ 6,0 cm
Da man das Restvolumen kennt, kann man auch die Höhe des Hahns über dem Boden berechnen:
Restvolumen $R = 80\,\text{cm}^3$
Höhe des Hahns s: $R = A \cdot s$, $s = \frac{R}{A} \approx 2{,}8\,\text{cm}$

2

Volumen des Zahnbechers: $V = \pi r^2 h$
$V \approx 254{,}47\,\text{cm}^3$
In einer Minute tropfen also $254{,}47\,\text{cm}^3 : 30 \approx 8{,}48\,\text{cm}^3$
Füllzeit für den Eimer mit $5000\,\text{cm}^3$: $5000 : 8{,}48 \approx 590$ (Minuten)
Der Eimer ist also bereits nach etwa 10 Stunden voll.
Da Herr Vogel erst nach etwa 80 Stunden zurückkommt, ist eine Überschwemmung vorprogrammiert!
Das Wasser, das über 70 Stunden aus dem Hahn tropft, verteilt sich auf den Kellerboden, der eine Fläche von
$300 \cdot 250\,\text{cm}^2 = 75\,000\,\text{cm}^2$ hat. In 70 Stunden fließen etwa
$8{,}48\,\text{cm}^3 \cdot 70 \cdot 60 = 35\,616\,\text{cm}^3$ Wasser.
Höhe der Überschwemmung: $\frac{35\,616\,\text{cm}^3}{75\,000\,\text{cm}^2} \approx 0{,}47\,\text{cm} = 4{,}7\,\text{mm}$
In einer Minute fallen 40 Tropfen, das heißt, ein Tropfen enthält $8{,}48\,\text{cm}^3 : 40 \approx 0{,}21\,\text{cm}^3$.
Ein Tropfen wiegt etwa 0,2 g.
Wenn der Tropfen kugelförmig ist, gilt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,
also $r^3 = 0{,}21\,\text{cm}^3 \cdot \frac{3}{4\pi} \approx 0{,}05\,\text{cm}^3$, also $r \approx 0{,}37\,\text{cm}$
Ein Tropfen hat einen Durchmesser von etwa 7 mm.

3

Alter Preis alte Bundesländer: a
Neuer Preis alte Bundesländer: $a \cdot 1{,}025$
Alter Preis neue Bundesländer: n
Neuer Preis neue Bundesländer: $n \cdot 1{,}035$
$a \cdot 1{,}025 = n \cdot 1{,}035$
$a \approx n \cdot 1{,}0098$
In den alten Bundesländern waren die Fahrkarten um etwa 0,98 % teurer.

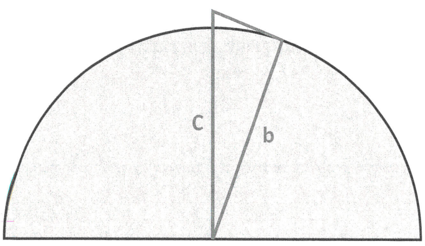
4

Reales Modell:
Die Leine muss so lang sein wie die Summe aus den Umfängen der 10 unterschiedlich großen Quadrate und den Verbindungsstücken entlang der Strebe.
Mathematisches Modell und Lösung:
Quadratlänge auf 1 m Höhe mit Strahlensatz:
$a_1 : 1{,}60\,m = 0{,}06\,m : 0{,}86\,m$
$a_1 \approx 0{,}11\,m$
Die weiteren Quadratlängen a_n für $1 \leqq n \leqq 10$ ergeben sich nach der Formel $\frac{a_n}{1{,}60\,m} = \frac{\left(0{,}06 + n \cdot \frac{1}{9} \cdot 0{,}8\right)}{0{,}86\,m}$. Sie lauten: 0,28 m; 0,44 m; 0,61 m; 0,77 m; 0,94 m; 1,10 m; 1,27 m; 1,43 m; 1,60 m.
Die Summe aller Quadratumfänge beträgt somit 8,56 m.
Die Länge entlang der Strebe ergibt 1,09 m.
Die Gesamtlänge beträgt 9,65 m, man sollte also eine 10-m-Leine kaufen.

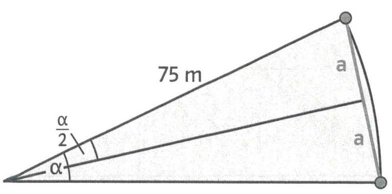
Brückenaufgaben, Seite 55

5

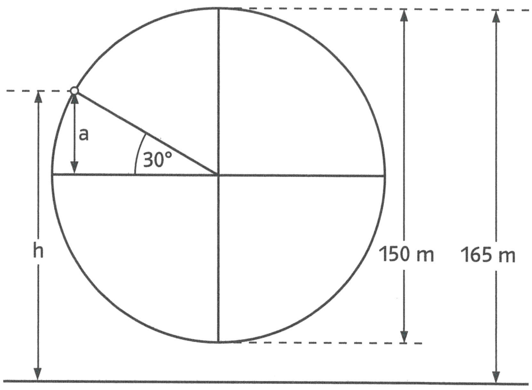
a) 28 Gondeln à 28 Personen ergibt die Gesamtkapazität
$28 \cdot 28 = 784$ Personen, wie angegeben.
Umfang $u = \pi \cdot d \approx 471{,}2\,m$
Gondelgeschwindigkeit:
v = Umfang : Umlaufzeit $\approx 471{,}2\,m : (0{,}5\,h) \approx 0{,}94\,km/h$
Bei dieser Geschwindigkeit kann man problemlos einsteigen.
In dem skizzierten rechtwinkligen Dreieck beträgt die Länge der Hypotenuse $c = 6370\,km + 165\,m$,
die Länge der einen Kathete ist $b = 6370\,km$,
die Länge der anderen Kathete ist die Sichtweite s in km.
Also gilt: $6370{,}165^2 = 6370^2 + s^2$
Daraus ergibt sich eine Sichtweite von etwa 45,8 km.



b) Länge des Kreisbogens zwischen zwei Gondeln:
$u : 28 \approx 16{,}8\,m$
Winkel $\alpha = 360° : 28 \approx 12{,}86°$
Im skizzierten rechtwinkligen Dreieck gilt:
$\sin(6{,}43°) = a : 75\,m \Rightarrow a \approx 8{,}4\,m$
Die gesuchte Entfernung beträgt etwa 16,8 m.



c) In 10 Minuten hat die Gondel $\frac{1}{3}$ Umdrehung vollendet, also 120°. Die Gondel befindet sich im skizzierten Punkt.
Die Höhe über dem Erdboden beträgt (abgelesen) etwa 130 m.
Rechnerische Bestimmung:
$\sin(30°) = a : 75\,m$, also $a = 37{,}5\,m$
Höhe der Gondel über dem Erdboden:
$h = 15\,m + 75\,m + 37{,}5\,m = 127{,}5\,m$



Übungsaufgaben, Seite 56

1

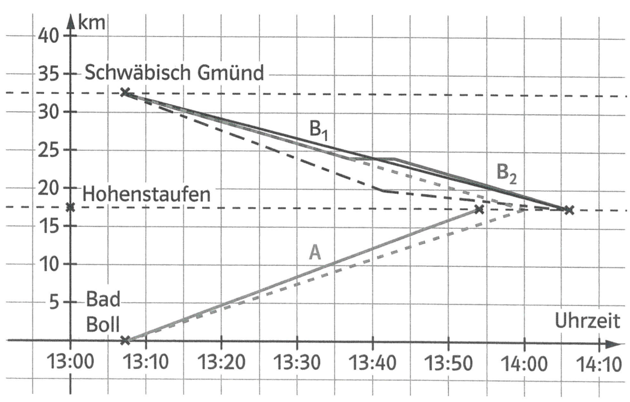
Den Zusammenhang zwischen der maximal zulässigen Breite und Höhe eines Fahrzeugs kann man aus dem Diagramm herleiten. Für s muss man einen angemessenen Sicherheitsabstand, z. B. 20 cm, einplanen.
(Fahrzeugbreite = b, Fahrzeughöhe = h + 2,10 m)
$h^2 + (0{,}5\,b)^2 = 1{,}8^2 \qquad h = \sqrt{3{,}24 - 0{,}25\,b^2}$

Mit dieser Formel berechnen Sie zu jeder Breite die maximal zulässige Höhe (auf 10 cm gerundet):

Breite in m	3,60	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	3,00	2,90	2,80	2,70	2,60
Höhe in m	2,10	2,50	2,70	2,80	2,90	3,00	3,10	3,20	3,20	3,30	3,30

2

a) B_1: Boris ist mit einer niedrigeren Durchschnittsgeschwindigkeit gefahren.
B_2: Boris hat unterwegs eine Pause von etwa sechs Minuten gemacht.
A: Alex ist mit einer höheren Durchschnittsgeschwindigkeit gefahren.
b) Die Fahrt von Boris könnte so (- — - skizziert) aussehen. Von 13:07 Uhr bis 13:41 Uhr fährt er schneller (steilere Gerade), von 13:41 Uhr bis 14:06 fährt er langsamer (flachere Gerade).



3

Höhenunterschied Bad Boll–Göppingen: 130 m

Gefälle: $\frac{130\,m}{10\,km} = 0{,}013$ entspricht 1,3 %

Höhenunterschied Göppingen–Hohenstaufen: 300 m

Steigung: $\frac{300\,m}{8\,km} = 0{,}0375$ entspricht 3,75 %

4

Die Diagonale des Balkens beträgt 14,4 cm, ist also kleiner als der Durchmesser des Rohres. Man kann den Balken durch das Rohr schieben.

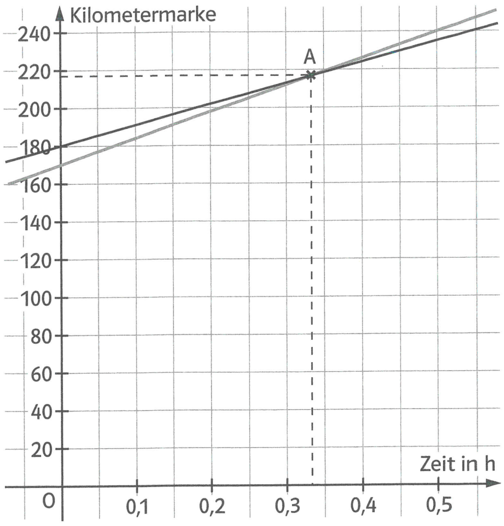
Übungsaufgaben, Seite 57

5

a) 1. Auto: $f_1(x) = 180 + 110x$

2. Auto: $f_2(x) = 170 + 140x$

b) Die zeichnerische Lösung ergibt, dass der zweite Wagen den ersten nach etwa 0,33 Stunden (also 20 Minuten) bei km 217 überholt.



Rechnerische Lösung:

$180 + 110x = 170 + 140x$, daraus folgt:

$x = \frac{1}{3}$

$y = \frac{650}{3} = 216\frac{2}{3}$

Der zweite Wagen überholt den ersten nach 20 Minuten bei km 217.

6

a) $f_A(x) = 13 + 6x$; $f_B(x) = 8x$

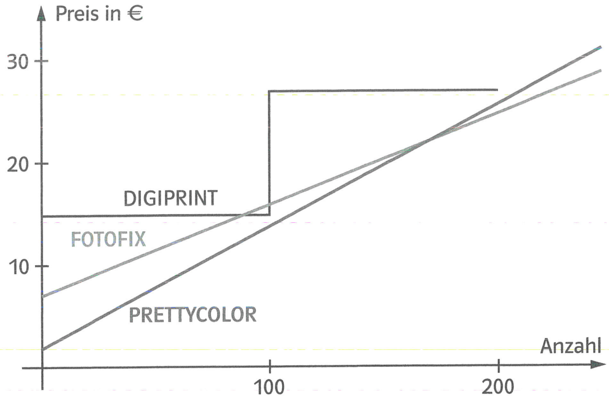
b) Nach 6,5 Minuten ist die Wasserhöhe gleich; sie beträgt 52 cm jeweils.

7

Rechnerische Bestimmung des Schnittpunkts der FOTOFIX- und der PRETTYCOLOR-Geraden:

$6{,}95 + 0{,}09x = 1{,}95 + 0{,}12x$ ergibt $x = 166{,}6$

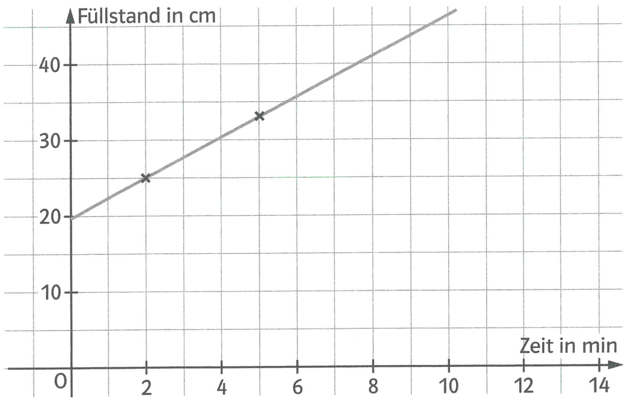
Hannah: „Wie du aus dem Diagramm erkennen kannst, solltest du bis zu einer Anzahl von 166 Fotos bei PRETTYCOLOR, ab 167 Fotos bei FOTOFIX bestellen. DIGIPRINT ist in jedem Fall teurer."



Übungsaufgaben, Seite 58

8

a)



b) $f(t) = mt + c$

Aus den Punkten (2 | 25) und (5 | 33) berechnet man $m = \frac{8}{3}$ und $c = \frac{59}{3}$.

$f(t) = \frac{8}{3}t + \frac{59}{3}$

$f(0) = \frac{59}{3} \approx 19{,}7$

Das Wasser stand zu Beginn des Füllvorgangs 19,7 cm hoch.

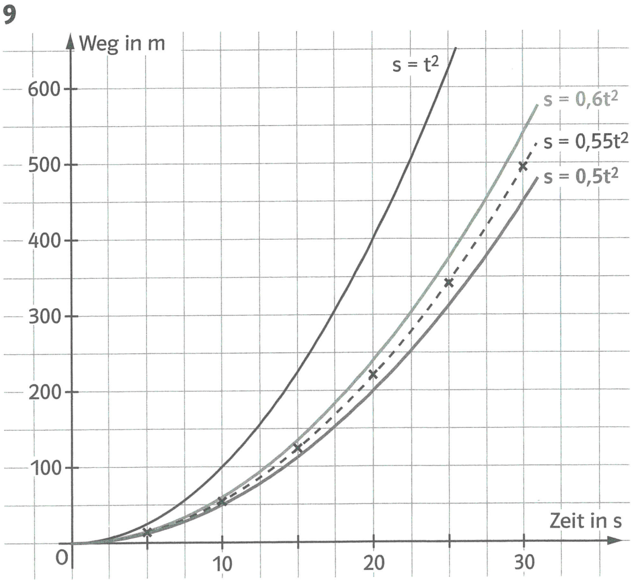
Zeichnerisch: Das Wasser stand etwa 20 cm hoch.

$\frac{8}{3}t + \frac{59}{3} = 150$ hat die Lösung $t = \frac{391}{8} = 48{,}875$

Die Tonne ist nach etwa 48,9 Minuten voll.

c) Für Werte $0 \leqq t \leqq 5$ könnte die Funktion den Auslaufvorgang beschreiben. Die Füllhöhe nimmt nach einem Anfangswert von 150 cm zuerst schnell, dann langsamer ab, bis nach 5 Minuten der Behälter leer ist.

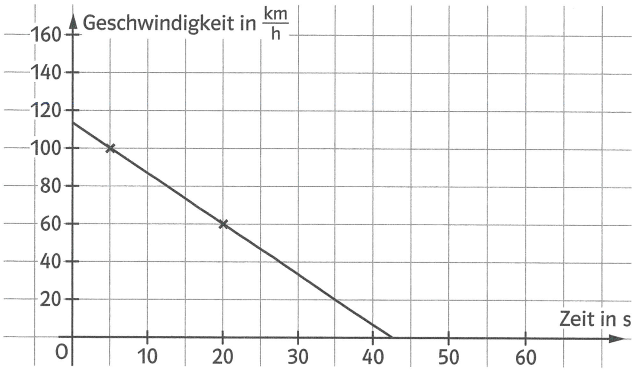
9



9
Man kann erkennen, dass die Parabel mit $s = 0{,}55\,t^2$ die gemessenen Werte gut beschreibt.
Rechnerische Überprüfung:
Verdoppelung des t-Werts von 5 auf 10
$\frac{53{,}6}{13{,}6} = 3{,}9$ (rund vierfacher s-Wert)
Verdreifachung des t-Werts von 5 auf 15
$\frac{124{,}1}{13{,}6} = 9{,}1$ (rund 9-facher s-Wert)
Vervierfachung des t-Werts von 5 auf 20
$\frac{222{,}6}{13{,}6} = 16{,}4$ (rund 16-facher s-Wert)
Verfünffachung des t-Werts von 5 auf 25
$\frac{343{,}5}{13{,}6} = 25{,}3$ (rund 25-facher s-Wert)
Vervierfachung des t-Werts von 5 auf 20
$\frac{482{,}2}{13{,}6} = 35{,}5$ (rund 36-facher s-Wert)
Wenn man also den t-Wert vergrößert, vergrößert sich der s-Wert quadratisch.

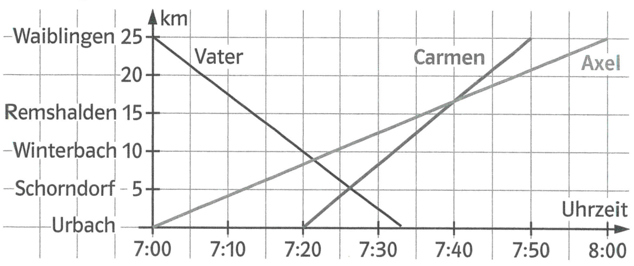
Übungsaufgaben, Seite 59

10
Zeichnerische Lösung: Nach etwa 43 Sekunden steht der Zug.



Rechnerische Lösung:
$-\frac{40}{15}(x - 5) + 100 = 0$
$x = 42{,}5$
Dadurch wird die zeichnerische Lösung bestätigt.

11
a) Axels Geschwindigkeit: $25\,\frac{km}{h}$;
Carmens Geschwindigkeit $50\,\frac{km}{h}$.
b) Axel ist um 8:00 Uhr, Carmen um 7:50 Uhr in Waiblingen.
c) Carmen überholt Axel um 7:40 Uhr zwischen Remshalden und Waiblingen nach 17 km.



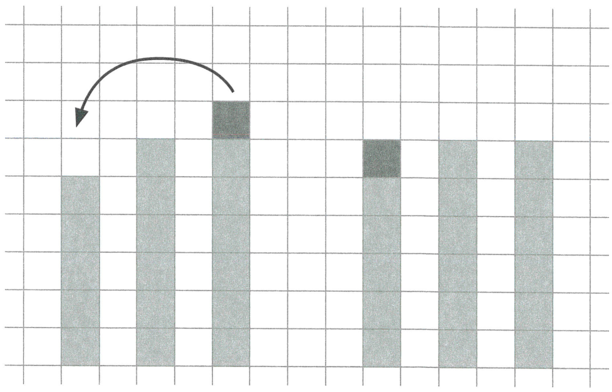
d) Carmen und ihr Vater begegnen sich um 7:26 Uhr in Schorndorf, ca. 5 km von Urbach entfernt (vgl. Weg-Zeit-Diagramm in c)).
Rechnerisch:
x: Minuten nach 7:00 Uhr
y: Entfernung von Urbach in km
Carmen: $y = \frac{5}{6}x - \frac{50}{3}$
Carmens Vater: $y = -0{,}75x + 25$
Schnitt der Geraden bei $(26{,}3 \,|\, 5{,}26)$ bestätigt die zeichnerische Lösung.

12
$15\,s - 10\,s = 5\,s$ $150\,g - 80\,g = 70\,g$
$15\,s - 5\,s = 10\,s$ $350\,g - 80\,g = 270\,g$ $\frac{10}{5} = 2$ $\frac{270}{70} = 3{,}9$
$15\,s - 0\,s = 15\,s$ $680\,g - 80\,g = 600\,g$ $\frac{15}{5} = 3$ $\frac{600}{70} = 8{,}6$
Wenn man also den t-Wert vom Scheitel aus vergrößert, vergrößert sich der Massen-Wert etwa quadratisch.

6 Problemlösen

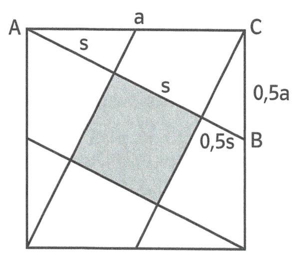
Brückenaufgaben, Seite 65

1
Beispiele:
$5 + 6 + 7 = 18$ $10 + 11 + 12 = 33$ $99 + 100 + 101 = 300$
Alle Summen sind durch drei teilbar.
Grafischer Ansatz:
Die drei Zahlen können durch drei Säulen mit unterschiedlich vielen Klötzchen dargestellt werden. Durch Umschichten eines Klötzchens entstehen drei gleich hohe Säulen.
Die Zahl der Klötzchen ist also eine durch drei teilbare Zahl.



Algebraischer Ansatz:
Wenn die mittlere Zahl x ist, ist die kleinere Zahl $x - 1$, die größere $x + 1$.
Die Summe der drei Zahlen beträgt $(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$, sie ist das Dreifache der mittleren Zahl und damit durch drei teilbar.

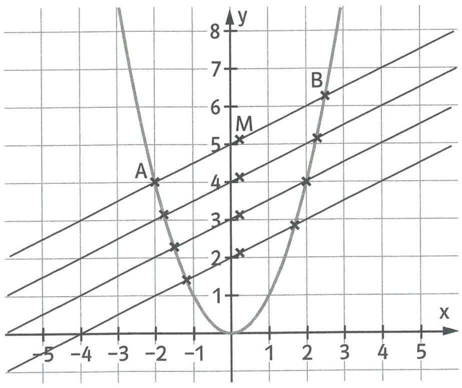
2
Grafisch:
Alle Dreiecke sind gleich groß (rechtwinklig und die Katheten sind jeweils der Länge s und $\frac{1}{2}s$); auch alle Trapeze sind gleich groß (Länge der Seiten: s; s; $\frac{1}{2}s$ und $\frac{1}{2}a$).



Wenn man an jedem der Trapeze spiegelverkehrt ein Dreieck anlegt, so sieht man, dass vier neue Quadrate entstehen, die so groß wie das mittlere Quadrat sind.
Somit ist die Fläche des mittleren Quadrats ein Fünftel der Gesamtfläche.
Allgebraisch:
Mithilfe der Strahlensätze ergeben sich für jede der eingezeichneten Verbindungslinien die in der Figur rechts eingetragenen Seitenverhältnisse.
Im Dreieck ABC gilt der Satz des Pythagoras:
$a^2 + (0{,}5\,a)^2 = (2{,}5\,s)^2$
$1{,}25\,a^2 = 6{,}25\,s^2$, also $s^2 = \frac{1}{5}a^2$
Das graue Quadrat nimmt ein Fünftel des großen Quadrats ein.

Brückenaufgaben, Seite 66

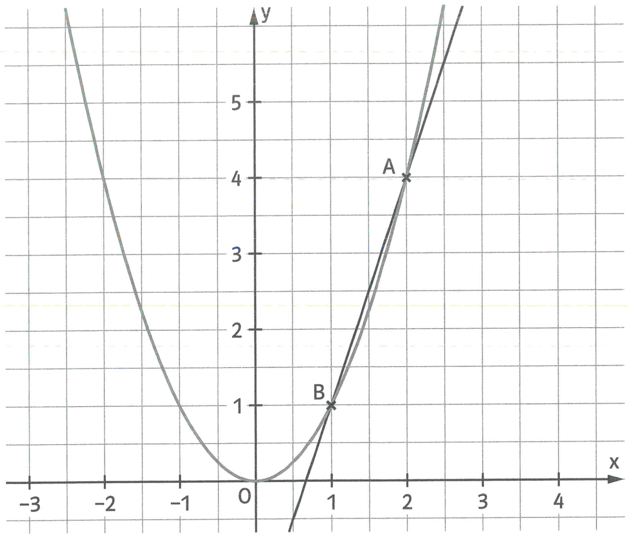
3
Die Streckenmitte von AB ist markiert, ebenso wie die Streckenmitten bei einigen Parallelen.
Es kann vermutet werden, dass diese Streckenmitten auf einer Geraden liegen, die parallel zur Parabelachse ist.
$y = \frac{1}{2}x + 3$
$A\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{9}{4}\right)$, $B(2|4)$, $M\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{25}{8}\right)$
$y = \frac{1}{2}x + 5$
$A(-2|4)$, $B\left(\frac{5}{2}\middle|\frac{25}{4}\right)$, $M\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{41}{8}\right)$
$y = \frac{1}{2}x + 0$
$A(0|0)$, $B\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$, $M\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{8}\right)$
Vermutung: Alle Seitenmitten M liegen auf der Geraden $x = \frac{1}{4}$.
$y = \frac{1}{2}x + b$
Die gemeinsamen Punkte dieser Gerade mit der Parabel $y = x^2$ sind die Lösungen der Gleichung
$x^2 = \frac{1}{2}x + b$ bzw. $x^2 - \frac{1}{2}x - b = 0$.
Diese lauten:
$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + b}$.
Somit gilt:
$A\left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} + b}\,\middle|\,\ldots\right)$, $B\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + b}\,\middle|\,\ldots\right)$, $M\left(\frac{1}{4}\middle|\ldots\right)$
Das heißt:
Alle Seitenmitten M liegen auf der Geraden mit der Gleichung $x = \frac{1}{4}$.



Übungsaufgaben, Seite 67

1
Zum Dividieren wendet man die Parabelmultiplikation „rückwärts" an:
Beispiel: 10,5 : 4,2: Durch den Punkt $C(0|10{,}5)$ auf der y-Achse und $A(4{,}2|y_A)$ auf der Parabel legt man eine Gerade. Diese schneidet die Parabel außer in A im Punkt B. Der Betrag der x-Koordinate dieses Punktes ist das gesuchte Ergebnis.
Regel:
Der Dividend wird auf der y-Achse eingetragen, der Divisor ist die x-Koordinate eines 1. Parabelpunktes rechts von der y-Achse. Die Gerade durch diese beiden Punkte schneidet die Parabel in einem 2. Punkt links von der y-Achse. Der positive x-Wert dieses Punktes ist der Wert des Quotienten.

2

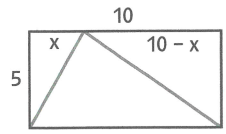


Zeichnerisch: $A(2|\ldots)$, $B(1|\ldots)$
Die y-Achse wird bei −2 geschnitten.
Beim Einführungsbeispiel 1 wurde vom Punkt $B(-2|\ldots)$ der Wert 2 zur Multiplikation verwendet, also der negative x-Wert.
Wenn die x-Werte der beiden Punkte a und b sind, erhält man also als y-Achsenabschnitt der Geraden AB: $-a \cdot b$.
Deshalb erhält man, wenn beide Punkte auf derselben Seite der Parabel liegen, eine negative Zahl als Ergebnis.
Im skizzierten Beispiel: Die beiden x-Werte sind 2 und 1, der y-Achsenabschnitt ist −2.

3
Der Sekunden- und der Minutenzeiger stehen zwischen 10 Uhr und 11 Uhr 58 Mal übereinander.
59 Zeitabschnitte in 60 Minuten
1 Zeitabschnitt: $\frac{60}{59}$ Minuten
1 Min. 1,017 Sek.
Die Zeiger stehen also übereinander um
10:01:1,017,
10:02:2,034,
10:03:3,051,
...

4
Die Summe von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist immer der Mittelwert der beiden mittleren Zahlen mit 4 multipliziert.
Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist immer die mittlere der fünf Zahlen mit 5 multipliziert.

5
Lösungsansatz mit einem Beispiel:
Wir wählen ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 und 10.
Für unterschiedliche Längen x können wir mit dem Satz des Pythagoras die Länge des Linienzuges berechnen:

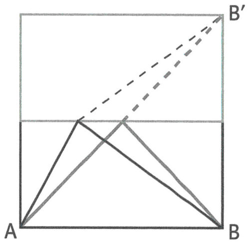


x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Länge des Linienzuges	16,2	15,4	14,8	14,4	14,2	14,1	14,2	14,4	14,8	15,4	16,2

Offensichtlich muss man für die kürzeste Entfernung genau die Mitte der Rechtecksseite wählen.

5

Zeichnerische Lösung:
Spiegelt man das Rechteck nach oben, wird der Punkt B zum Punkt B′ und aus dem blauen Linienzug der blau-blau-gestrichelte Linienzug.



Man erkennt sofort, dass die kürzeste Verbindung zwischen A und B′ die gerade Linie ist, und demzufolge die kürzeste Entfernung von A nach B genau über die Mitte der Rechtecksseite laufen muss.

Übungsaufgaben, Seite 68

6

Wenn ein Quadrat die Seitenlänge a hat, hat seine Diagonale die Länge $a\sqrt{2}$.
Wenn bei DIN A0 die kürzere Seite x ist, dann muss die längere $x\sqrt{2}$ sein:
$x \cdot x\sqrt{2} = 1$ hat die Lösung $x = 0{,}841\,\text{m}$
Die Maße in mm sind also:

DIN A0	841 × 1189
DIN A1	595 × 841
DIN A2	420 × 595
DIN A3	297 × 420
DIN A4	210 × 297

7

Einige mögliche Wege:

Strecke an Land in m		Strecke im Wasser in m	Zeit an Land in s	Zeit im Wasser in s	Gesamtzeit in s
100		40	16,7	30,8	47,4
95	5	40,3	15,8	31,0	46,8
90	10	41,2	15,0	31,7	46,7
85	15	42,7	14,2	32,8	47,0

Aus diesen Zeitberechnungen erkennt man, dass Nina etwa 90 m am Strand laufen soll, bevor sie sich ins Wasser stürzt. Durch weitere Berechnungen mit Landstrecken zwischen 90 m und 95 m kann man das Ergebnis auf 91 m verbessern.

8

Tabellarischer Lösungsansatz:

Eintrittspreis	Gäste	Einnahmen
10 €	300	3000 €
11 €	285	3135 €
12 €	270	3240 €
13 €	255	3315 €
14 €	240	3360 €
15 €	225	3375 €
16 €	210	3360 €

Analytischer Lösungsansatz:
Wenn x die Eintrittspreiserhöhung ist, dann beträgt der Eintrittspreis $(10 + x)$ €;
und die Gästezahl $300 - 15x$.
Einnahmen:
$f(x) = (10 + x)(300 - 15x)$
$f(x) = 3000 + 150x - 15x^2$
Dies ist die Gleichung einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Scheitel bei $(5\,|\,3375)$; an der Stelle $x = 5$ ist somit der y-Wert am höchsten ($y = 3375$).

Wenn der Eintrittspreis um 5 € erhöht wird, sind die Einnahmen am größten.

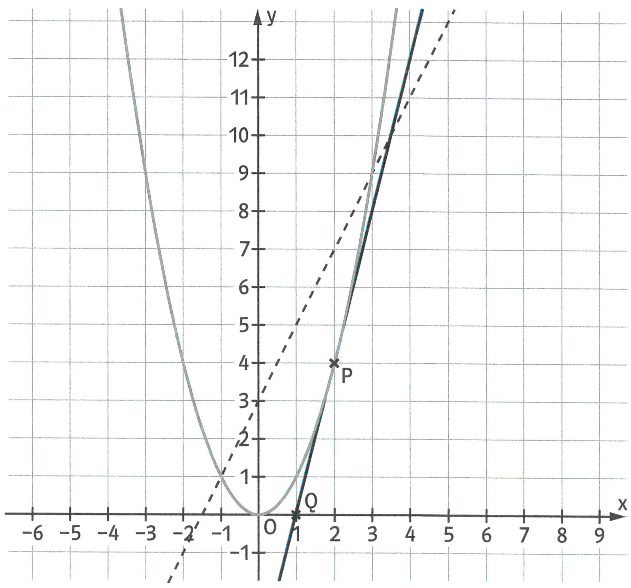
9

Preis bei Firma LAP:
Ausgangspreis · 0,95 · 0,85 = Ausgangspreis · 0,8075
Preis bei Firma TOP:
Ausgangspreis · 0,85 · 0,95 = Ausgangspreis · 0,8075
Bei beiden Firmen liegt der Endpreis 19,25 % unter dem Ausgangspreis.

Übungsaufgaben, Seite 69

10

a) Die gestrichelte Gerade mit der Gleichung $y = 2x + 3$ schneidet die Normalparabel bei $x = -1$ und bei $x = 3$:
Steigung der Geraden = 2 = Summe der x-Werte
Allgemein: Die Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ schneidet die Normalparabel bei $x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + c}$ und bei $x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + c}$.
Summe der x-Werte: $x_1 + x_2 = m$
b) Die Gerade durch den Parabelpunkt $P(2\,|\,4)$ und den Punkt $Q(1\,|\,0)$ auf der x-Achse hat die Steigung 4 (siehe schwarze Gerade). Weil aber die Summe der beiden x-Werte der Schnittpunkte gleich der Steigung sein muss, hat der zweite Schnittpunkt ebenfalls den x-Wert 2. Die Gerade schneidet also die Parabel in genau einem Punkt, d. h., sie berührt sie.
Allgemein: Parabelpunkt $P(a\,|\,a^2)$,
Punkt auf der x-Achse: $Q\left(\frac{a}{2}\,\middle|\,0\right)$
Steigung: $m = 2a$
Der zweite Schnittpunkt muss ebenfalls den x-Wert a haben.
Die Gerade berührt die Parabel.



11

Für das Schrittmaß 59 cm beim kleinsten Steigungswinkel 22°:
$\tan(22°) = \frac{\text{Stufenhöhe}}{\text{Stufentiefe}}$
$\text{Stufentiefe} = \frac{\text{Stufenhöhe}}{\tan(22°)} \approx 2{,}475 \cdot \text{Stufenhöhe}$
Schrittmaß = 4,475 · Stufenhöhe
59 cm = 4,475 · Stufenhöhe
Stufenhöhe ≈ 13,18 cm
Bei einer Treppenhöhe von 2,80 m benötigt man 21 Stufen.

11

Beim größten Steigungswinkel 45°:

$\tan(45°) = \frac{\text{Stufenhöhe}}{\text{Stufentiefe}}$

Stufentiefe = Stufenhöhe

Schrittmaß = 3 · Stufenhöhe

59 cm = 3 · Stufenhöhe

Stufenhöhe ≈ 19,67 cm

Bei einer Treppenhöhe von 2,80 m benötigt man 14 Stufen.
Für die anderen Schrittmaße ergeben sich die folgenden Werte:

Schrittmaß	59	60	61	62	63	64	65
kleinste Stufenzahl	14	14	14	14	13	13	13
größte Stufenzahl	21	21	21	20	20	20	19

12

Vor der Mittagspause: 10 g Substanz (1 %)
990 g Wasser (99 %)
Nach der Mittagspause: 10 g Substanz (2 %)
490 g Wasser (98 %).
Die Gurke wiegt jetzt 500 g.

7 Interpretieren und Argumentieren

Brückenaufgaben, Seite 73

1

a) Die S-Bahn benötigt für die ca. 11 km lange Strecke etwa 13 Minuten. Zwischen Start- und Zielbahnhof hält sie an 4 Stationen. Die Stationen sind 1,5 km, 5,2 km, 7,4 km und 10,2 km vom Startbahnhof entfernt. Die Haltezeit an diesen Stationen schwankt zwischen 60 Sekunden und 80 Sekunden.
b) Zwischen der 1. und 2. Station ist die Gerade am steilsten, das heißt, hier ist die Geschwindigkeit am größten. In etwa 120 Sekunden legt die Bahn etwa 3,7 km zurück, das entspricht einer Geschwindigkeit von ungefähr 110 km/h.
c) Die Gesamtstrecke ist dieselbe, die Stationen haben dieselbe Entfernung vom Startbahnhof wie bei der ersten Fahrt. Der gesamte Fahrtverlauf (Geschwindigkeiten, Haltezeiten) ist sehr ähnlich wie bei der ersten Fahrt.

Brückenaufgaben, Seite 74

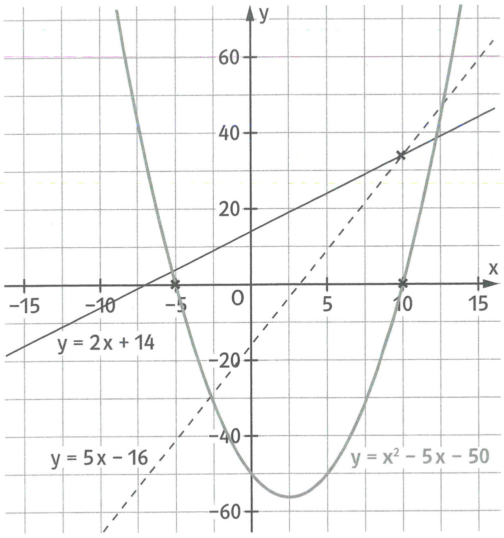
2

Mögliche Antworten:
In der Tabelle werden die Tage im Juli der Jahre 1991 bis 2010 angegeben, an denen es (mehr als 0,1 mm) geregnet hat. Im Durchschnitt über diese 20 Jahre hat es laut Tabelle an 15,6 Tagen geregnet. Das Jahr mit den meisten Regentagen im Juli, nämlich 22, war 2000, die wenigsten Juli-Regentage, nämlich 9, gab es 2006. In der Hälfte des betrachteten Zeitraums gab es 16 oder mehr Regentage im Juli, nur in 5 Jahren, nämlich 1991, 1994, 1995, 2001 und 2006, gab es höchstens 11 Regentage im Juli, in allen anderen Jahren waren es mindestens 15. Auch wenn die drei Jahre mit den meisten Regentagen erst nach 1999 auftraten, kann man nicht sagen, dass es im Laufe der Jahre immer mehr Juli-Regentage gegeben hat.

3

Die Aussagen (A) und (B) sind richtig, da die Geraden genau einen Schnittpunkt, nämlich bei x = 10, haben.
Die Parabel dagegen hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Die Aussage C ist daher falsch, da die Lösungsmenge {−5, 10} lautet. Die Aussage D ist an sich richtig, denn x = 10 ist eine Lösung, wenn auch unvollständig.

Beide Aussagen sollten richtigerweise lauten:
(C) „Die Gleichung $x^2 - 5x - 50 = 0$ hat die Lösungsmenge {−5, 10}."
(D) „Die Gleichung $x^2 - 5x - 50 = 0$ hat die Lösungen x = −5 und x = 10."



Brückenaufgaben, Seite 75

4

1. Beispiel: $0{,}6^2 + 0{,}4 = 0{,}76$ und $0{,}4^2 + 0{,}6 = 0{,}76$
2. Beispiel: $0{,}9^2 + 0{,}1 = 0{,}91$ und $0{,}1^2 + 0{,}9 = 0{,}91$

Die Ergebnisse sind bei beiden Verfahren gleich.
Kleinere Zahl: a; größere Zahl: b
Gleichung: a + b = 1, umgestellt nach b: b = 1 − a
1. Term: $b^2 + a = (1 - a)^2 + a = 1 - a + a^2$
2. Term: $a^2 + b = a^2 + 1 - a = 1 - a + a^2$
Die beiden Verfahren haben immer dasselbe Ergebnis.

5

- Der Parabelpunkt bei x = 3 liegt unterhalb von y = 1. — falsch
- Die Parabelpunkte unterhalb von y = 1 sind bei x = 3. — falsch
- Alle Parabelpunkte haben eine y-Koordinate, die größer oder gleich −1 ist. — richtig
- Alle Parabelpunkte mit negativer x-Koordinate haben eine y-Koordinate, die größer als 1 ist. — richtig
- Der Punkt A(1,5 | 3) liegt auf der Parabel. — falsch
- Im Bereich zwischen x = 0,5 und x = 2,5 liegen alle Parabelpunkte auf oder unterhalb der x-Achse. — richtig
- Rechts von x = 1 liegen alle Parabelpunkte unterhalb der x-Achse. — falsch

Übungsaufgaben, Seite 76

1

Die Gesamtstrecke ist dieselbe.
Die Haltestellen bei der blauen und schwarzen Kurve sind
bei 0 km 1,5 km 5,3 km 7,4 km 10,3 km 11,2 km
Distanzen: 1,5 km 3,8 km 2,1 km 2,9 km 0,9 km
Die Haltestellen bei der grauen Kurve sind
bei 0 km 0,9 km 3,8 km 5,9 km 9,7 km 11,0 km
Distanzen: 0,9 km 2,9 km 2,1 km 3,8 km 1,3 km
Die Distanzen sind in etwa dieselben in der umgekehrten Reihenfolge. Peter hat die Daten offensichtlich auf der Rückfahrt von der Schule aufgenommen.

2

Die Aussage	trifft zu für
Für $x = 3$ ist $y = 4$	F, G
Für $x > 4$ ist $y < 2$	D, E
Die Steigung ist $m = -1{,}5$	D, E
Die Geradengleichung ist $x = 3$	F
Die Geradengleichung ist $y = 2x + c$	keine
Aus $2 < y < 4$ folgt $-2 < x < 1$	E

3

ursprünglicher Umsatz: U
nach der Einbuße: 0,8 U
nach der Steigerung: 1,2 (0,8 U) = 0,96 U
Der Umsatz befindet sich immer noch 4 % unter dem ursprünglichen Niveau.

Übungsaufgaben, Seite 77

4

Die richtigen Buchstaben von oben nach unten: T R E F F E R

5

Die Rechenoperationen müssen in der umgekehrten Reihenfolge rückgängig gemacht werden:

$\left(\frac{1}{13{,}661225} + 100\right)^2 \cdot 1500 + 1000000 = 16021968$

Nikos Lehrerin ist also am 16.02.1968 geboren.

6

„Es hat 50 Liter geregnet" ist eine umgangssprachliche, aber natürlich keine sinnvolle Aussage. Gemeint ist damit: „Es hat 50 Liter pro Quadratmeter" geregnet. Ein Quader mit einem Volumen von 50 Liter, der die Grundfläche von einem Quadratmeter hat, hat eine Höhe von $h = \frac{50\,dm^3}{100\,dm^2}$, also 50 mm. Das bedeutet also, dass bei dem Unwetter genauso viel Regen gefallen ist wie sonst durchschnittlich in einem Monat.

Übungsaufgaben, Seite 78

7

In den Leserbriefen gehen Sie auf folgende Fehler im Text ein:

Schnellfahrer:
„Jeder Fünfte" beschreibt doppelt so viele wie „Jeder Zehnte" und ist gleichbedeutend mit zwanzig Prozent, nicht mit „fünf Prozent".

Arbeitende Mütter:
Offenbar hat der Autor falsch addiert: Aus „jede Zweite" und „jede Dritte" entsteht „jede Fünfte". Wenn die Zahl der arbeitenden Mütter in Ost und West gleich wären, dann wäre der Anteil an allen erwerbstätigen Müttern $\frac{49 + 38}{2}$%. Da dies aber sicher nicht der Fall ist, haben die beiden Prozentangaben unterschiedliche Grundwerte. Man kann deshalb aus den Angaben nicht auf ganz Deutschland schließen.

Älterwerden:
Ein Mensch, der 70 Jahre alt ist, kann nicht 10 Jahre jünger sein als ein 70-Jähriger.

Preisverfall:
Ein Preissturz von 100 Prozent bedeutet, dass das Gerät nichts mehr kostet. Dies könnte zwar tatsächlich eintreten, aber ein weiterer Preisverfall würde dann bedeuten, dass die Kunden beim Kauf eines Gerätes nichts bezahlen müssten, sondern im Gegenteil dafür Geld herausbekämen.

8

a) Das Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand innerhalb von 5 Sekunden auf $60\frac{km}{h}$. Eine halbe Minute lang fährt der Fahrer mit dieser gleichbleibenden Geschwindigkeit. Weil vor ihm ein Hindernis auftaucht, muss er abbremsen. Er bremst 5 Sekunden lang auf eine Geschwindigkeit von $40\frac{km}{h}$ ab. Nachdem er das Hindernis passiert hat, beschleunigt er 10 Sekunden lang wieder auf $50\frac{km}{h}$. Dann erkennt er vor sich einen Stau und bremst heftig ab, sodass er fünf Sekunden später zum Stillstand kommt.

b) Herr Gärtner öffnet den Wasserhahn und lässt 5 Minuten lang Wasser in ein Fass laufen, bis es zur Hälfte gefüllt ist. Dann dreht er den Hahn zu. Nach einer halben Stunde Gartenarbeit lässt er aus dem Fass 5 Minuten lang 20 Liter Wasser gleichmäßig in sein Beet fließen. Unmittelbar danach dreht er den Wasserhahn wieder ein wenig auf, sodass in den nächsten 10 Minuten 10 Liter Wasser in das Fass laufen. Herr Gärtner lässt dann die 50 Liter Wasser, die sich im Fass befinden, innerhalb von 5 Minuten gleichmäßig auslaufen.

Übungsaufgaben, Seite 79

9

wahr	falsch	Gegenaussage
X		Es gibt mehr oder weniger als zwei Paare paralleler Geraden.
X		Mindestens eine Gerade hat die Gleichung $y = 1{,}3x - 2$.
	X	Nicht alle Geraden haben unterschiedliche Steigungen, oder mindestens zwei Geraden haben dieselbe Steigung.
X		Höchstens 60 % der Geraden (das sind höchstens 4) haben einen positiven y-Achsenabschnitt.
X		Mindestens zwei der Geraden verlaufen vollständig im Bereich $y > 0$.
	X	Mindestens eine der Geraden schneidet eine andere Gerade nicht.

10

Mögliche Aussagen sind zum Beispiel:
In vier Jahren betrug die Niederschlagsmenge mehr als 160 mm.
Die durchschnittliche Niederschlagsmenge beträgt etwa 80 mm.
Die Niederschlagsmenge war nur einmal unter 20 mm.
Mindestens in 20 % aller Jahre betrug die Niederschlagsmenge mehr als 100 mm.

Beilage zu Sicher in die Oberstufe – Arbeitsheft nach dem mittleren Bildungsabschluss **ISBN:** 978-3-12-732625-3

Internetadresse: www.klett.de

Zeichnungen / Illustrationen: Sandra Oehler, Remseck
Satz: SMP Oehler, Remseck
Druck: Druckhaus Götz GmbH, Ludwigsburg